

## КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ТІЛ З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ

*Проводяться систематичні дослідження і розробка ефективних методів розв'язку контактних задач для тіл з початковими (залишковими) напруженнями. Запропоновані розв'язки плоских і просторових задач контактної взаємодії тіл лінеаризованої теорії пружності стали науковою передумовою створення інженерної методики проблеми передачі навантаження в тілах з залишковими напруженнями. Визначається характер контактної взаємодії у спряженні вал — вушко з урахуванням тертя та зношування. Розглядаються трибоконтактні задачі для підшипників ковзання з урахуванням зношування вала та моделі перехідних процесів при неусталених режимах зношування.*

*There are carried out systematic researches and development of effective methods of solving contact problems for bodies with initial (residual) strains. The suggested solutions of plain and space problems of contact interaction of bodies in linearized elasticity became a scientific presupposition of creating the engineering way of the load transfer problem in bodies with residual strains. There is determined the feature of contact interaction in the coupling shaft — lug with friction and wear consideration. There is considered tribocontact problems for sliding bearings with consideration of the shaft wear and model of transient processes by unsteady modes of wear.*

*Ключові слова: контактна взаємодія, початкові напруження, тертя, зношування.*

### 1. Вступ

Проблема передачі навантаження в конструкціях і деталях машин через їх контактну взаємодію відіграє важливу роль в сучасній техніці й охоплює широку область дослідження фундаментального і прикладного характеру. На сьогодні один із аспектів цієї проблеми пов'язаний з якісно новим підходом — врахуванням впливу початкових (залишкових) напружень на закон розподілу контактних зусиль в області контакту. Досить показний клас задач з урахуванням початкових (залишкових) напружень присвячений контактній взаємодії тіл з жорсткими штампами, детальний аналіз яких наведено в оглядовій статті [1]. Проте, реальні тіла, що знаходяться в контакті, як правило, є пружними. І хоч жорсткість одного може перевищувати жорсткість іншого, інженерну практику найбільше цікавить напружено-деформований стан обох тіл, що знаходяться в контакті [5].

Як відомо, початкові (залишкові) напруження практично завжди існують в елементах конструкцій і деталях машин. Причини їх існування різноманітні: незворотні деформації (пластичність, повзучість), структурні зміни в матеріалах, зміна агрегатного стану в окремих місцях конструкцій і т.д. Причому початкові (залишкові) напруження можуть викликати в тілах, що знаходяться в контакті, такі ж дії, як і зовнішні навантаження, тобто можуть спричиняти деформації, руйнування, збільшувати тенденцію до втрати стійкості і внутрішнього тертя, прискорювати певні фазові переходи, корозію і т. д. Тому, врахування початкових (залишкових) напружень при розрахунку відповідальних елементів конструкцій, машин і споруд, дозволить при їх створенні більш ефективно врахувати міцнісні характеристики матеріалів, шляхом правильної оцінки запасів міцності та істотно знизити їх матеріалоемність, зберігаючи при цьому функціональні характеристики конструкцій і споруд в цілому. Слід зауважити, що не дивлячись на широкий спектр літератури по контактній задачі (в класичній постановці) [13], дослідження з проблем контактної взаємодії тіл з початковими (залишковими) напруженнями в нашій країні і за кордоном з'явилися лише за останні 30 років [1]. Це пов'язано з тим, що при дослідженні задач про контактну взаємодію пружних тіл з початковими (залишковими) напруженнями лінійна теорія пружності не враховує цих напружень. Їх можна врахувати в рамках лінеаризованої теорії пружності [3 – 9, 41]. Сам факт врахування початкових (залишкових) напружень в рамках лінеаризованої теорії пружності призводить до нових постановок задач контактної взаємодії деформованих тіл, які істотно відрізняються від постановок цих задач в класичній теорії пружності. І хоч при розв'язуванні цих задач системи основних диференціальних рівнянь вирази для вивчення складових тензора напружень і структура граничних умов відрізняються від відповідних систем рівнянь і виразів тензора напруження класичної теорії пружності, вони за своєю природою і структурою схожі на звичайні контактні і змішані задачі [3]. Розглянемо постановку і загальний метод розв'язування контактних задач в рамках лінеаризованої теорії пружності. Мета цього повідомлення — за можливістю найбільш повно представити і кваліфікувати наукові праці, присвячені теорії контактної взаємодії пружних тіл з початковими (залишковими) напруженнями.

### 2. Постановка контактних задач для пружних тіл з початковими (залишковими) напруженнями.

#### Загальний метод розв'язування задач лінеаризованої теорії пружності

Розглянемо пружне стисливе або нестисливе тіло з потенціалом довільної структури. Для ортотропного тіла вважаємо, що пружно еквівалентні напрямки збігаються з напрямком осей координат початкового деформованого стану  $(y_1, y_2, y_3)$ .

Наведемо граничні умови і сформулюємо основні положення задач контактної взаємодії пружних (жорстких) штампів і тіл з початковими напруженнями для лінеаризованої теорії пружності. Вважаємо, що

надалі завжди виконуються чотири положення, які є основними в теорії контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями і, отже, визначають область її застосування.

**Положення 1.** Контактна взаємодія пружного (жорсткого) штампу без початкових (залишкових) напружень з пружним тілом, в якому виникають початкові (залишкові) напруження, відбувається після виникнення в останньому початкового (залишкового) напруженого стану.

**Положення 2.** Зовнішнє навантаження, що діє на пружний (жорсткий) штамп, викликає у тілі з початковими (залишковими) напруженнями (додатково по відношенню до початкового (залишкового) напруженого стану) збурення напружено-деформованого стану за величиною значно менше відповідних величин початкового (залишкового) напруженого стану.

**Положення 3.** Початковий (залишковий) напружений стан одного з тіл, що перебувають у контактній взаємодії, має таку структуру, що в області їхнього контакту можна (наближено, з достатнім ступенем точності) вважати початковий (залишковий) напружений стан однорідним.

**Положення 4.** Розв'язання лінеаризованих задач теорії пружності про контактну взаємодію тіл з початковими (залишковими) напруженнями – єдине.

Отже, за першим положенням здійснюється контакт тіл, що взаємодіють після виникнення там початкових (залишкових) напружень (або в одному із них), за другим положенням можна застосовувати лінеаризовану теорію [3 – 9] для дослідження додаткового (до початкового) напружено-деформованого стану. Третє положення дозволяє з урахуванням другого положення застосовувати лінеаризовану теорію пружності при однорідному початковому стані. Четверте припущення забезпечує єдність розв'язків одержаних таким чином лінеаризованих задач про контактну взаємодію пружних штампів з тілами, в яких виникають початкові напруження. Дослідження лінеаризованих задач контактної взаємодії пружних штампів з тілами, в яких виникають початкові напруження, без виконання четвертої умови не має ніякого сенсу, оскільки у даному випадку відбувається втрата внутрішньої стійкості [41].

Необхідно зазначити, що друге положення в розглядуваному випадку порушується біля точок зміни граничних умов. В цих точках напруження, підраховані за формулами лінеаризованої теорії пружності, необмежено зростають. Аналогічна ситуація виникає і в контактних задачах лінійної теорії пружності. Висновок із проведеної там дискусії для теорії контактних задач лінійної теорії пружності полягає у наступному: у розв'язках контактної задачі лінійної теорії пружності (плоскі і просторові) для жорстких і пружних штампів виникає особливість степеневого порядку  $O(\rho^{1-\lambda'})$ , де  $\rho$  – віддаль від точки до граничної точки області контакту;  $\lambda'$  – параметр, що визначається із деякого трансцендентного рівняння і залежить від пружних сталих тіл, що перебувають у контакті. Ці особливості виникають у точках зміни граничних умов.

У цих точках контактні напруження приймають «нескінченні значення» і, безумовно, не мають фізичного змісту. Проте на обчислення інтегральних характеристик (осадка, кут повороту, головний момент і т.п.) у контактних задачах для жорстких і пружних штампів ці особливості не впливають. Наведений вище висновок повністю належить і контактним задачам лінеаризованої теорії пружності, тільки тут параметр  $\lambda'$  залежить ще і від структури пружного потенціалу. На основі четвертого положення у випадку просторових задач контактної взаємодії однорідний стан приймаємо у вигляді

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (1)$$

Тут  $\lambda'$  – коефіцієнт видовження, що визначає переміщення початкового (залишкового) напружено-деформованого стану.

Враховуючи це, запишемо граничні умови для розглядуваної проблеми.

Нехай пружний штамп довільного поперечного перерізу (рис. 1) вдавлюється в пружний півпростір або шар зовнішнім навантаженням, що зводиться до рівнодійної  $P$  так, що його вільний торець деформується в напрямку осі  $oy_3$  на величину  $\varepsilon$ . Поза зоною контактної взаємодії і вільного торця пружного штампів всі поверхні вільні від напруження.

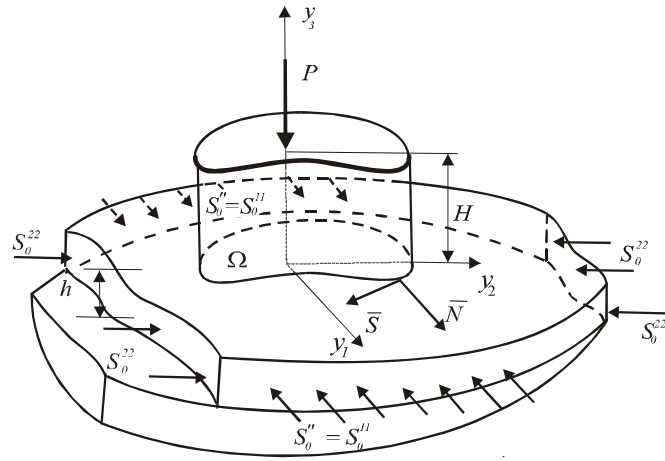


Рис. 1

Граничні умови для такої моделі контактної взаємодії пружного штампа і півпростору (шару) з початковими напруженнями запишемо в довільній циліндричній системі координат початкового напруженого стану  $(N, S, y_3)$ .

Цю систему обираємо так, щоб площина  $y_3 = 0$  збігалася з поверхнею півпростору або шару з початковими напруженнями, а вісь  $Oy_3$  спрямуємо паралельно твірній пружного штампа. Вважаючи, що пружний штамп і півпростір (шар) зроблено з різних ізотропних матеріалів, для визначення характеристик напружено-деформованого стану в пружному штампі і півпросторі з початковими напруженнями запишемо граничні умови окремо для півпростору і шару.

Для системи із пружного штампа і півпростору: на торці пружного штампа

$$u_z = -\varepsilon, \sigma_{zN} = 0, \sigma_{zs} = 0, \quad \forall (N, S) \in \Omega; \quad (2)$$

на границі пружного півпростору в області контакту

$$u_3 = u_z, \tilde{Q}_{33} = \sigma_{zz}, \tilde{Q}_{3N} = 0, \tilde{Q}_{33} = 0; \quad (3)$$

$$\sigma_{zN} = 0, \sigma_{zs} = 0, \quad \forall (N, S) \in \Omega; \quad (4)$$

на границі пружного півпростору поза областю контакту

$$\tilde{Q}_{3s} = 0, \tilde{Q}_{3N} = 0, \tilde{Q}_{33} = 0, \quad \forall (N, S) \in \Omega; \quad (5)$$

на боковій поверхні пружного штампа

$$\sigma_{3N} = \sigma_{3N} = \sigma_{Ns} = 0, \quad \forall (N, S) \in \Omega. \quad (6)$$

Для системи із пружного штампа і шару з початковими напруженнями повинні ще виконуватися умови при  $y_3 = -h$ : для шару, який лежить без тертя, на жорсткій основі

$$u_3 = 0, \tilde{Q}_{3r} = 0, \quad \forall (N) \in [0; \infty); \quad (7)$$

для шару з початковими напруженнями, жорстко зчепленого з недеформованою основою,

$$u_3 = 0, u_r = 0, \quad \forall (N) \in [0; \infty); \quad (8)$$

для шару з початковими напруженнями, що лежить без тертя на пружній основі з початковими напруженнями,

$$u_3 = u_3^{(0)}, \tilde{Q}_{33} = \tilde{Q}_{33}^{(0)}, \quad \forall (N) \in [0; \infty). \quad (9)$$

Граничні умови разом з умовою рівноваги

$$P = - \iint_{\Omega} [\tilde{Q}_{33}] \Big|_{y_3=0} d\Omega \quad (10)$$

дають замкнену постановку просторових лінеаризованих задач про контактну взаємодію пружного штампа і тіл з початковими напруженнями.

Для жорстких штампів граничні умови одержуються граничним переходом. Для [11, 12, 14, 15, 18, 22, 31, 39] постановка задач і граничні умови лінеаризованих задач про контактну взаємодію (накладки, стрінгери) та півплощина смуги з початковими (залишковими) напруженнями адекватні (1) – (8).

Зауважимо, що для задач контактної взаємодії тіл з початковими (залишковими) напруженнями і пружних (жорстких) штампів приходимо до лінеаризованих задач, для яких у декартових координатах початкового деформованого стану одержуємо системи диференціальних рівнянь і граничні умови з постійними коефіцієнтами.

В роботі [10] сформульовано загальний метод розв'язування задач лінеаризованої теорії пружності, який дає можливість побудувати точний розв'язок задачі контактної взаємодії з початковими (залишковими) напруженнями, для яких побудовані розв'язки відповідних задач у випадку лінійно пружного тіла без початкових напружень (рис. 1). Суть методу наведена в монографіях [8, 9]. Нижче застосуємо цей метод до розв'язування задачі про тиск пружного штампу на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями.

Нехай в пружній півпростір з початковими (залишковими) напруженнями втискується пружний штамп довільного поперечного перерізу висотою  $H$ . Навантаження прикладене так, що його вільний торець деформується в напрямку осі  $Oy_3$  на однакову величину  $\varepsilon$ , а бічна поверхня поза областю контакту вільна від зовнішніх зусиль. Іншими словами, будемо мати справу з такими випадками, коли зовнішні зусилля, які створюють напружений стан, прикладаються до півпростору з початковими напруженнями, за допомогою іншого пружного тіла (скінченного пружного штампа довільного перерізу) і викликають в останніх осесиметричне деформування. У цьому випадку граничні умови для визначення напруженого стану в півпросторі з початковими напруженнями і пружному штампі будуть (2) – (6).

Для знаходження напружено-деформованого стану і переміщень в півпросторі з початковими (залишковими) напруженнями зручно скористатися функціями, введеними при розв'язуванні змішаної задачі для тріщин довільної форми [7]. Як і в [7], з врахуванням граничних умов (2) – (6) для півпростору з початковими напруженнями введемо нові потенціали: для рівних коренів  $n_1 = n_2$

$$\tilde{\varphi}_1(y_1, y_2, z_j) = (1 + m_1)^{-1} f(y_1, y_2, z_j); \quad \tilde{\varphi}_2(y_1, y_2, z_j) = -(1 + m_2)^{-1} f(y_1, y_2, z_j); \quad (11)$$

для нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$

$$\tilde{\varphi}_1(y_1, y_2, z_j) = n_1^{1/2} (1 + m_1)^{-1} f(y_1, y_2, z_j); \quad \tilde{\varphi}_2(y_1, y_2, z_j) = -n_2^{1/2} (1 + m_2)^{-1} f(y_1, y_2, z_j). \quad (12)$$

Напружено деформований стан півпростору буде відомим, якщо знайдено потенціал  $f(y_1, y_2, z_j)$ .

З диференціального рівняння

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} \right) f(y_1, y_2, z_j) = 0 \quad (13)$$

за наступних граничних умов для потенціалів (11) і (12)

$$u_z = -\varepsilon; \quad \sigma_{zx} = 0; \quad \sigma_{zy} = 0; \quad \forall (y_1, y_2) \in S^*. \quad (14)$$

На межі пружного півпростору в зоні контакту

$$\frac{\partial f}{\partial y_3} = \omega_2^{-1} u_z; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} = \omega_3 \sigma_{zz}; \quad \sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0, \quad \forall (y_1, y_2) \in S^*; \quad (15)$$

на межі півпростору поза зоною контакту

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} = 0, \quad \tilde{Q}_{31} = 0, \quad \tilde{Q}_{32} = 0, \quad \forall (y_1, y_2) \in S^*; \quad (16)$$

на бічній поверхні циліндра

$$\sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \forall (y_3) \in [0, H]. \quad (17)$$

На межі півпростору при  $y_3 = 0$  можна, врахувавши  $z_j = n_j^{-\frac{1}{2}} y_3$ , використати співвідношення

$$f(y_1, y_2, z_j) = f(y_1, y_2, y_3); \quad \frac{\partial f(y_1, y_2, z_j)}{\partial z_j} = \frac{\partial f(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_3}. \quad (18)$$

Враховуючи (18) на межі  $y_3 \leq 0$ , для рівних і нерівних коренів дістаємо

$$u_1(y_1, y_2, 0) = \omega_2 \frac{\partial f}{\partial y_3}; \quad \tilde{Q} = \omega_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2}; \quad \tilde{Q} = \omega_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2}; \quad \tilde{Q}_{31} = \tilde{Q}_{32} = 0. \quad (19)$$

Введемо новий потенціал  $\chi(y_1, y_2, y_3)$  таким чином:

$$\omega_2 \frac{\partial f(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_3} = \chi(y_1, y_2, y_3). \quad (20)$$

Із формул (14) – (17) з урахуванням (18) дістаємо, що при  $y_3 = 0$  для потенціалу  $\chi(y_1, y_2, y_3)$  граничні умови на торці і бічній поверхні пружного штампa ідентичні виразам (14), (18), а на межі півпростору з початковими напруженнями приймають вигляд: в області контакту пружного штампa з півпростором

$$\chi = u_z; \quad \frac{\partial \chi}{\partial y_3} = \omega_2 \omega_3 \sigma_{zz}; \quad \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0, \quad \forall (y_1, y_2) \in S^*; \quad (21)$$

поза областю контакту пружного штампa з півпростором

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial y_3^2} = 0, \quad \tilde{Q}_{31} = 0, \quad \tilde{Q}_{32} = 0, \quad \forall (y_1, y_2) \in S^*. \quad (22)$$

Отже, дістали змішану задачу (14), (17), (21), (22) теорії гармонічного потенціалу для півпростору з початковим напруженням, що взаємодіє з пружним штампом довільного поперечного перерізу. Ця задача для потенціалу  $\chi(y_1, y_2, y_3)$  співпадає зі змішаною задачею для потенціалу [13]. У випадку класичної теорії пружності потрібно зробити заміну

$$\omega_2 \omega_3 \sim \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)}. \quad (23)$$

Отже, у випадку півпростору без початкових напружень класична контактна задача, що розглядається, зводиться до визначення для півпростору гармонічного потенціалу (13) і для пружного штампa бігармонічного потенціалу залежить від

$$\lambda, \mu \text{ і } \omega_2 \omega_3 \sim \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)}. \quad (24)$$

**Твердження.** Вважаємо, що класична контактна задача про тиск пружного штампa на пружний півпростір без початкових напружень розв'язана і в результаті розв'язків визначені потенціали

$$f = f(y_1, y_2, y_3, \lambda, \mu, \omega_2, \omega_3), \quad \Phi(y_1, y_2, y_3, \lambda, \mu, \omega_2, \omega_3). \quad (25)$$

У цьому випадку для визначення відповідних потенціалів, які дають розв'язок контактної задачі для пружного півпростору з початковими напруженнями при дії пружного штампa аналогічної форми, завантаженої таким же навантаженням  $P$ , необхідно ввести заміни (23).

За твердженням можна побудувати точні розв'язки задачі для пружного півпростору з початковими напруженнями (на який тисне пружний штамп довільного поперечного перерізу), для якого побудовані розв'язки відповідних задач у випадку лінійно-пружного тіла без початкових напружень.

Так, порівнюючи переміщення у відповідних лінійних задачах [13] з результатами задач для тіл з

початковими (залишковими) напруженнями [10, 16, 17, 19, 21, 23, 28 – 30, 40] для рівних і нерівних коренів [10], знаходимо, що переміщення під пружним штампом, який перебуває в контакті з півпростором з початковими (залишковими) напруженнями, можна записати у вигляді

$$u_3(y_1, y_2, 0) = ku_3^0(y_1, y_2, 0), \quad (26)$$

де  $k$  – коефіцієнт, який характеризує вплив початкових (залишкових) напружень;  $u_3$  і  $u_3^0$  – відповідно вертикальні переміщення під штампом в півпросторі з початковими (залишковими) напруженнями і без них. Коефіцієнт  $k$  не залежить від поперечного перерізу і форми штампа [10, 16, 17, 19, 21, 40] в області контакту і для конкретних потенціалів має вигляд: потенціал гармонічного типу

$$k = \frac{\lambda_1^2}{\gamma + 2} \left( \lambda_1 - \frac{1 + \gamma}{2 + \gamma} \right)^{-1}, \quad (27)$$

потенціал Бартенєва – Хазановича

$$k = 2\lambda_1^{\frac{7}{2}} (3\lambda_1^3 - 1)^{-1}, \quad (28)$$

потенціал Трелоара (неогуківські тіла)

$$k = 2\lambda_1^4 (\lambda_1^3 + 1) (\lambda_1^9 + \lambda_1^6 + 3\lambda_1^3 - 1)^{-1}. \quad (29)$$

Зауважимо, що коефіцієнт  $k$  у випадку гармонійного типу [7] рівний безмежності, коли  $\lambda_1 = \lambda_{kp} = \frac{1 + \gamma}{\lambda + \gamma}$ ;  $\lambda_1 = \lambda_{kp} = 0,69336$  для потенціала Бартенєва – Хазановича;  $\lambda_1 = \lambda_{kp} = 0,667$  для потенціала Трелоара. Значення  $\lambda_1 = \lambda_{kp}$  відповідає початковому видовженню, при якому настає нестійкість півпростору при рівномірному стисненні півпростору, з'являються ефекти «резонансного характеру», тобто ми одержуємо **механічний ефект**, який відповідає відповідним контактним задачам в рамках лінеаризованої теорії пружності у випадку жорстких штампів.

На рис. 2 показано графічну залежність коефіцієнта видавлення  $\lambda_1$ , одержану в працях [10, 16, 17, 19, 21, 40] у випадку стиску, коли  $\lambda_1 < 1$ , і розтягу, коли  $\lambda_1 > 1$ . Із графіка на рис. 2 слідує, що вплив початкових (залишкових) напружень на переміщення під штампом як для стисливих, так і нестисливих тіл збільшується при стиску; при розтязі це збільшення незначне,  $\lambda_1 < 1$ .

Відмітимо, що запропонований загальний метод розв'язку лінеаризованих контактних задач [8 – 10] широко використаний для розв'язку аналогічних задач у випадку плоского початкового (залишкового) напруженого стану.

### 3. Півпростір з початковими (залишковими) напруженнями під дією пружного штампу

Розглянуті нижче дослідження присвячені штампам контактної взаємодії півпростору з початковими (залишковими) нвпруженнями і пружного кінцевого штампу. Розглянуто такі конкретні задачі:

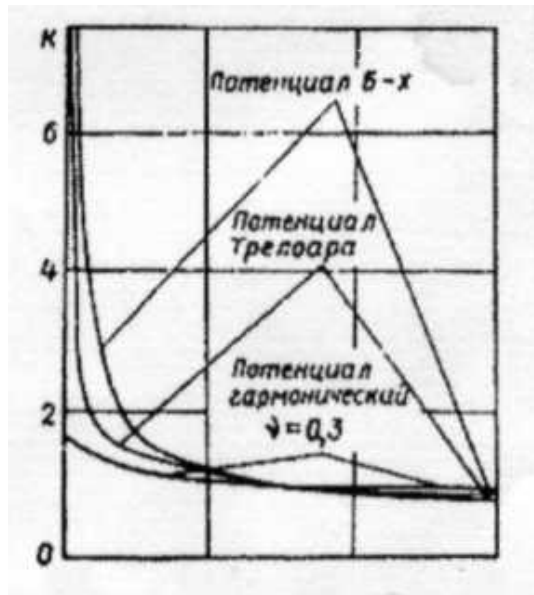


Рис. 2

а) тиск пружного скінченного циліндричного штампу на півпростір з початковими напруженнями [10, 16, 19, 21, 23, 30, 40];

б) взаємодія двох попередньо напружених півпросторів з пружним кінцевим циліндричним штампом [28, 29].

Для визначення напружено-деформованого стану пружних штампів використовуються рівняння рівноваги Ляме, розв'язок яких знаходимо з допомогою скінченних загальних перетворень Фур'є і Ханкеля.

Всі розглядувані задачі досліджуються єдиним способом, суть якого полягає в зведенні розв'язку задачі до нескінченних систем квазірегулярних алгебраїчних систем рівнянь

$$\alpha_n \chi_k + \sum \alpha_{kn} \chi_k = d_n,$$

тут  $\alpha_n, \alpha_{kn}, d_k$  – коефіцієнти системи, що залежать від початкового (залишкового) напруженого стану і геометричних розмірів пружного штамп. На основі одержаних значень  $\chi_k$  знайдені числові значення напружено-деформованого стану задач, які представлені у вигляді графіків (рис. 3 – 8). Всі числові підрахунки проведені для відносних довжини пружного штамп  $l=10$  при коефіцієнтах Пуассона  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0,3$  і відношень  $\delta = 2$ . На основі аналітичного і числового аналізу розв'язку задач [8 – 10, 16, 19, 21, 23, 25, 29, 40] можна зробити висновки.

Присутність початкових (залишкових) напружень призводить до істотної зміни величини і характеру розподілу контактних напружень і переміщення в пружному штампі. При цьому найбільш істотний вплив виявлено в точках, близьких до бокової поверхні штамп; найбільший вплив початкових (залишкових) напружень виявлено коло підосви штамп. Виявлено істотний вплив початкових (залишкових) напружень в пружному півпросторі на закон розподілу контактних зусиль і переміщень. Цей вплив призводить до зменшення контактних зусиль у випадку стиску  $\lambda_1 < 1$  і збільшення – у випадку розтягу  $\lambda_1 > 1$ . Тобто створюючи штучно відповідний початковий (залишковий) напружений стан, можна регулювати величину контактних зусиль в області контакту.

На границі області контакту нормальні контактні переміщення мають особливість  $(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}+\gamma}$ , де  $\gamma$  – проектор, який визначається з трансцендентного рівняння і залежить від структури пружного потенціалу.

Результат впливу початкових (залишкових) напружень на величину і характер їх розподілу істотно залежить від виду пружного потенціалу [8, 9]. Більш істотний вплив якісного характеру відмічений у високоеластичних матеріалах, менший вплив – в стисливих матеріалах.

При прямуванні початкових (залишкових) напружень до величин, що відповідають поверхневій нестійкості півпростору, проявляються ефекти «резонансного характеру». Напруження в пружному штампі рівні нулю, переміщення різко зростають і штамп переміщується так, як жорстке тіло. Контактні напруження також прямують до нуля, а переміщення під штампом співпадають з переміщенням його торця.

Метод побудови розв'язків розглянутих задач для півпростору з початковими (залишковими) напруженнями розповсюджується стосовно аналогічних задач для пружного шару з початковими (залишковими) напруженнями [1, 5, 8, 9, 19 – 21, 24, 26, 27, 29 – 35, 37, 38].

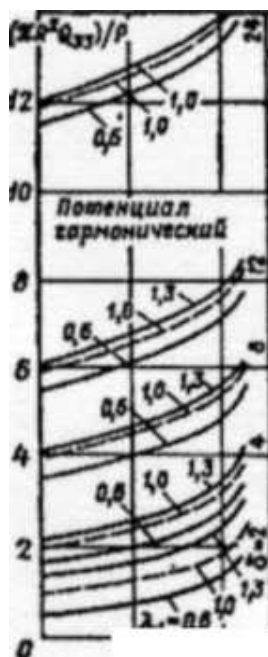


Рис. 3



Рис. 4

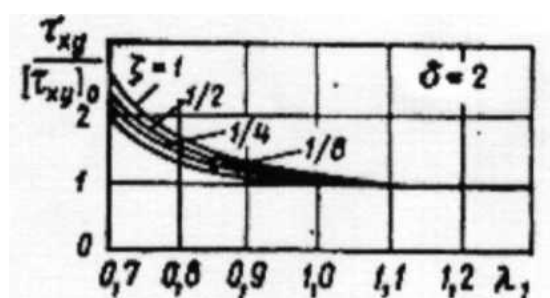


Рис. 5

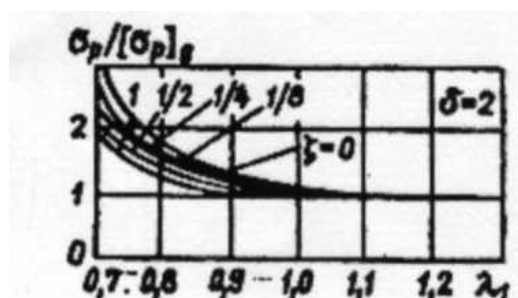


Рис. 6

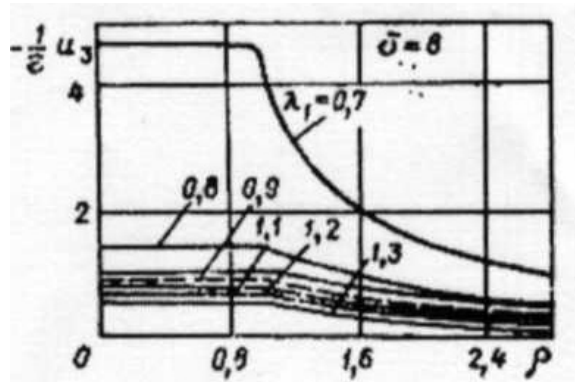


Рис. 7

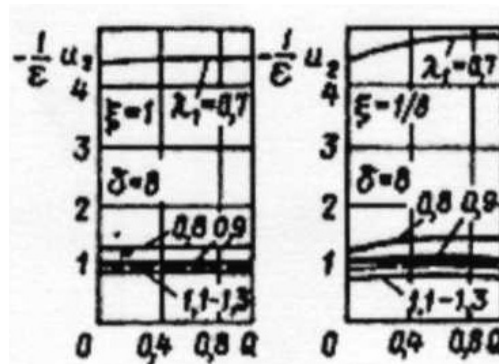


Рис. 8

Розглянуті випадки: а) шар лежить без тертя на жорсткій основі; шар лежить на пружній основі; б) задача про тиск двох співвісних циліндричних штампів скінченних розмірів (різні радіуси і висоти). Граничні умови дають можливість визначити переміщення і напруження в штампях через одну нескінченну систему постійних  $\chi_k$  для шару і деяку шукану функцію  $F(\eta)$ . Зв'язок між сталими  $\chi_k$  і  $F(\eta)$  знаходимо з інтегрального рівняння [8, 9].

$$\xi F(\eta) = \frac{z\varepsilon\omega_2}{\pi} \left[ (1 - \chi_0)\psi(\eta, 0) - \frac{1}{\omega_2} \sum_{k=1}^{\infty} \psi(\eta, \mu_k) \right] + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} x^{-1} F(x) G_j(x, h) \psi(\eta, x) dx,$$

де функція  $G_j(x, h)$  – визначає спосіб закріплення шару;  $\omega_2, \omega_2^0$  – коефіцієнти, що визначають структуру пружного потенціалу;  $\psi(\eta, \mu_k)$  – відома функція [8, 9].

Дослідження виконані у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів довільної структури як для теорії великих (скінченних) деформацій, так і для різних варіантів малих початкових (залишкових) деформацій. У кінцевому результаті всі вищезгадані задачі приведені до регулярних нескінченних систем алгебраїчних рівнянь відносно деяких сталих  $\chi_k$ , через які виражені контактні напруження і переміщення в шарі з початковими (залишковими) напруженнями і пружних штампях. Відмітимо лише, що у випадку  $\lambda_1 = 1$  (класична теорія пружності) для пружних потенціалів, які відповідають значенням нерівних коренів визначального рівняння, одержані розв'язки [24 – 27] не співпадають з аналогічними розв'язками для лінійного трансверсального ізотропного тіла. Це слідує з того факту, що загальний розв'язок рівнянь рівноваги теорії пружності трансверсально-ізотропного тіла не співпадає з загальними розв'язками лінеаризованої теорії пружності [3 – 9].

На рис. 9 – 16 наведені значення напружень і переміщень в області контакту, причому штрихові криві відповідають шарові без початкових напружень [13]. На цих графіках, як і на графіках для півпростору (рис. 8), зображені криві, які відповідають значенням  $\lambda_1 = 0.7; 0.8; 0.9$  стиск,  $\lambda_1 = 1$  – лінійна теорія пружності,  $\lambda_1 = 1.1; 1.2; 1.3$  – розтяг. Із графіків слідує, що у випадку стиску ( $\lambda < 1$ ) початкові (залишкові) напруження в шарі призводять до зменшення контактних зусиль, у випадку розтягу ( $\lambda > 1$ ) – до збільшення приблизно на однакову величину. Для шару, відносна товщина якого  $h = \infty$ , треба користуватися розв'язком для півпростору. На основі аналізу аналітичних рішень і числових підрахунків в монографіях [8, 9] наведені висновки аналогічні

до тих, що й у випадку відповідних задач про тиск пружного штампу на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями.

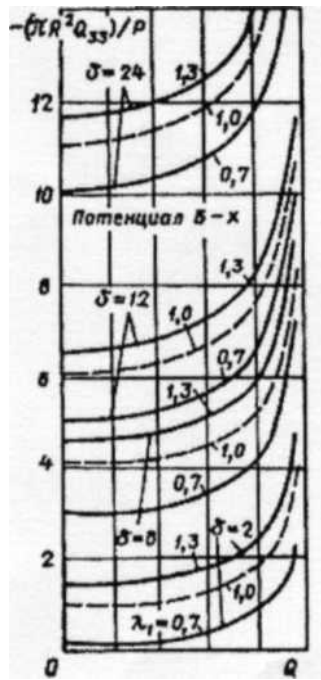


Рис. 9

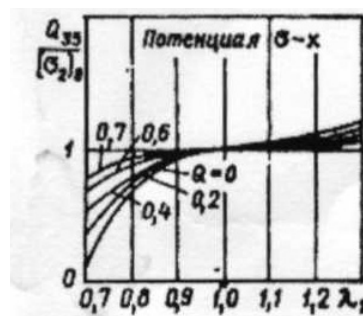


Рис. 10

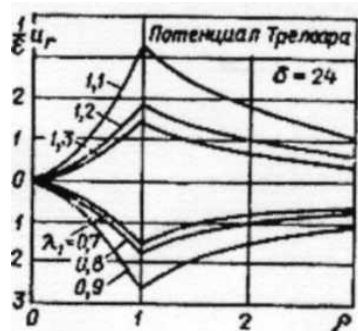


Рис. 11



Рис. 12



Рис. 13

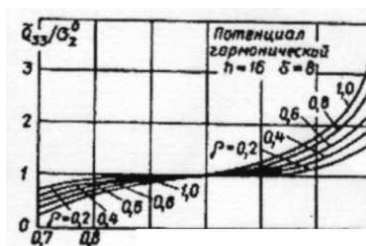


Рис. 14

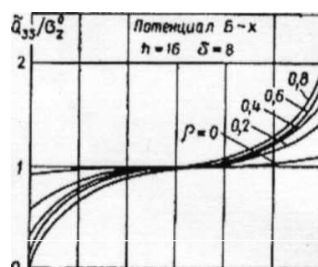


Рис. 15

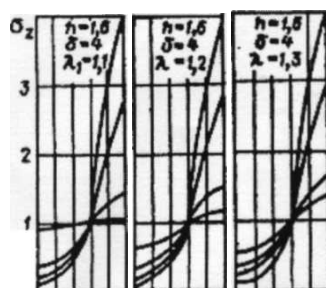


Рис. 16

В работах [17, 18] досліджено плоскі статичні задачі лінеаризованої теорії пружності для однієї і двох півплощин з початковими (залишковими) напруженнями, які взаємодіють з прямокутним пружним штампом. Функцію напруження для прямокутного штампа знаходимо з бігармонічного рівняння з допомогою скінченних

перетворень Фур'є [17]. Розв'язок для півплощини з початковими (залишковими) напруженнями знаходимо у вигляді [8, 9].

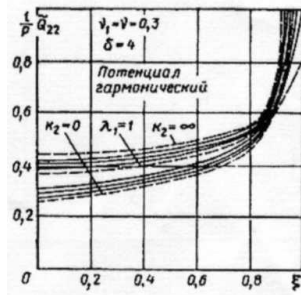


Рис. 17

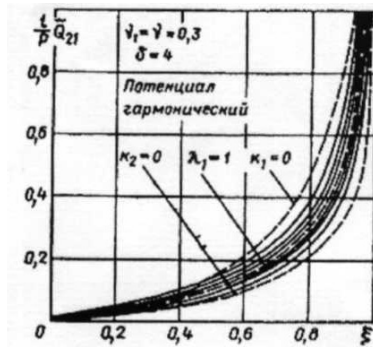


Рис. 18

Пропонується загальний метод розв'язку поставлених задач. Суть цього методу полягає в зведенні розглядуваної задачі до задачі типу Рімана – Гільберта з невідомою правою частиною, аналогічно як у [10]. Крім того, в [8, 9] розглянутий метод зведення названих задач до синглярних інтегро-диференційних рівнянь без врахування і з врахуванням зчеплення. З допомогою методу ортогональних поліномів ці рівняння (системи) приведені до нескінченних квазірегулярних систем алгебраїчних рівнянь, через невідомі яких виражаються всі характеристики напружено-деформованого стану пружного прямокутного штапу і півплощини з початковими (залишковими) напруженнями. Доведено регулярність одержаних систем, розглянуто числовий приклад на рис. 17, 18. З одержаних графіків можна зробити висновки, які в якісному відношенні співпадають з висновками по просторових задачах.

В працях [11, 12, 14, 15, 22, 31, 35, 38, 39] розглянуто клас плоских контактних задач про контактну взаємодію пружних накладок і півплощини з початковими (залишковими) напруженнями. Для рівних і нерівних коренів визначального рівняння [8] одержані сингулярні інтегро-диференціальні рівняння (системи) з коефіцієнтами, які залежать від вигляду пружних потенціалів. Одержані рівняння дають можливість сформулювати загальний метод розв'язання вказаних задач лінеаризованої теорії пружності у вигляді такого твердження.

**Твердження.** Будемо рахувати, що розв'язок сингулярних інтегро-диференційних рівнянь, які відповідають задачам контактної взаємодії пружних накладок кінечної довжини з ізотропною (для рівних коренів) і анізотропною (для нерівних коренів) півплощиною без початкових (залишкових) напружень знайдено і в результаті одержані відповідні функції, що визначають розв'язок задач. В цьому випадку для визначення контактних зусиль в пружній півплощині з початковими (залишковими) напруженнями, підсиленіми пружними накладками таких же геометричних розмірів, необхідно зробити заміну відповідних постійних коефіцієнтів.

З допомогою цього методу можна одержати точний розв'язок широкого класу плоских задач для пружних тіл з початковими (залишковими) напруженнями у випадку ідентичних пружних накладок лінійної теорії пружності.

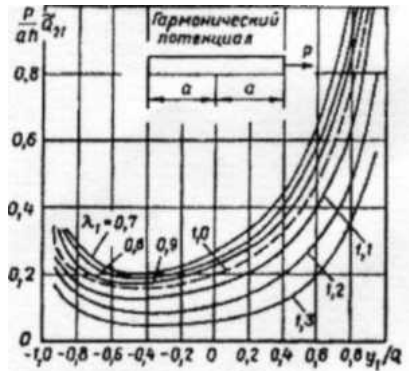


Рис. 19

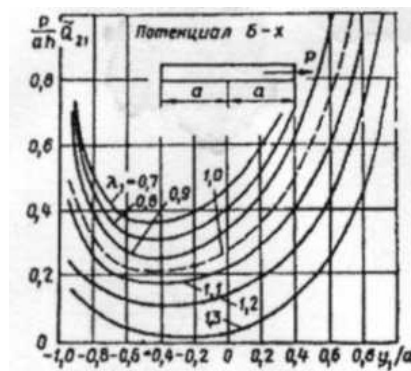


Рис. 20

На рисунках 19, 20 показано розподіл контактних зусиль під однією накладкою для двох потенціалів найпростішої структури – гармонічного потенціалу Бартенева – Хазановича. Із графіків слідує, що розподіл контактних зусиль в якісному відношенні співпадає з висновками по просторових задачах, різниця лише – в кількісному відношенні.

### Висновки по напрямку I

Таким чином, аналіз виконаних робіт в наковій школі «Контактна взаємодія тіл з початковими (залишковими) напруженнями» дозволяє зробити висновок у виконаних дослідженнях: одержано вагомі результати і подальший розвиток теорії контактної взаємодії напівскінченних пружних тіл з пружними штампами скінченних розмірів при врахуванні в останніх початкових (залишкових) напружень, які включають: а) постановку задач контактної взаємодії стисливих і нестисливих тіл з початковими (залишковими) напруженнями і пружних скінченних штампів в загальній формі для теорії великих (скінченних) і двох варіантів малих початкових (залишкових) деформацій у випадку довільної структури пружного потенціалу; б) подальший розвиток методів розв'язання плоских і просторових контактних задач лінеаризованої теорії пружності з істотним використанням інтегральних перетворень, інтегральних рівнянь, сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, теорії гармонічного потенціалу, методів задачі Рімана – Гільберта, а також існуючих числових методів дослідження з оцінкою збіжності і ефективності цих методів на прикладі розв'язування конкретних задач; в) розв'язок конкретних класів задач плоских, просторових задач для напівскінченних тіл та пружного шару з початковими (залишковими) напруженнями, які перебувають в контакт з пружними кінцевими штампами та пружними підсилюючими накладками; виявлено новий механічний ефект, пов'язаний з впливом початкових (залишкових) напружень.

1. В рамках лінеаризованої теорії пружності запропоновано загальний метод розв'язування просторової задачі контактної взаємодії півпростору з початковими (залишковими) напруженнями з пружним штампом довільного поперечного перерізу (без врахування сил тертя), суть якого полягає в зведенні розглядуваної задачі до змішаної задачі теорії гармонічного потенціалу з невідомою правою частиною. Ця задача розв'язується сумісно з задачею для пружного штамп, так як вони зв'язані загальними граничними умовами. Розглянуті також задачі контактної взаємодії для півпростору і шару з початковими (залишковими) напруженнями з пружними циліндричними штампами у випадку осесиметричних деформацій.

У всіх розглянутих задачах застосовується і розвивається єдиний метод розв'язування, який полягає в зведенні розглянутих задач з допомогою інтегральних перетворень Ханкеля до інтегрального рівняння Фредгольма II роду з наступним зведенням задачі до цілком регулярних нескінчених систем алгебраїчних рівнянь. Для потенціалів найпростішої структури (гармонічний, Бартенева – Хазановича, Трелоара) виконані числові розрахунки (Maple 8) результати яких представлені на графіках рис. 2 – 20.

2. В рамках лінеаризованої теорії пружності розглянута загальна плоска контактна задача, яка зведена до задачі типу Рімана – Гільберта з правою частиною. Ця задача розв'язується сумісно з задачею для пружного прямокутника. Показано, що одержаний результат дає можливість визначити переміщення під пружним прямокутним штампом по невідомому розв'язку аналогічної задачі для пружної півплощини без початкових (залишкових) напружень. Для потенціалів найпростішої структури зроблені числові підрахунки (Maple 8), які якісно співпадають з висновками для просторових задач.

3. Пропонується новий спосіб розв'язку класу задач для півплощини з початковими (залишковими) напруженнями, підсиленою однією, двома та періодично розміщеними пружними тонкими накладками, а також для двох півплощин з'єднаних пружною тонкою накладкою для стисливих і нестисливих матеріалів тіл при довільній структурі пружного потенціалу. Одержані основні сингулярні інтегро-диференціальні рівняння, на основі яких сформульовано загальний метод розв'язку класу задач. Метод дозволяє знаходити розподіл напружень і переміщень під накладкою і в пружній півплощині з початковими (залишковими) напруженнями, якщо відомо розв'язок адекватної задачі для пружних ізотропних і анізотропних площин без початкових (залишкових) напружень. Для потенціалів найпростішої структури побудовані графіки, які підтверджують висновки по просторових і плоских задачах.

4. Одержано розв'язки цілого класу осесиметричних задач у випадку півпростору і шару з початковими

напруженнями при врахуванні зчеплення штампів і півпростору (шару) в зоні контакту. Співставляючи розв'язки розглянутих задач з розв'язками аналогічних задач без зчеплення (абсолютно гладких штампів), слід відмітити значний вплив початкових (залишкових) напружень в півпросторі та шарі в точках близьких до границі контакту, причому у випадку стиску ( $\lambda < 1$ ) і розтягу ( $\lambda > 1$ ) вплив початкових напружень має такий же характер, як і в просторових задачах без врахування значення.

5. Розв'язок вищезгаданих класів задач одержано для пружних потенціалів довільної структури у випадку великих (скінченних) і всіх варіантів малих початкових (залишкових) деформацій. Знайдено закон впливу початкових (залишкових) напружень на напружено-деформований стан тіл, що перебувають в контакті, а також закон розподілу контактних зусиль.

Вказані ті границі зміни пружних постійних матеріалів з врахуванням початкових (залишкових) напружень, при яких з достатньою для практики точністю одне тіло по відношенню до іншого можна рахувати жорстким.

6. З'ясовано вплив початкових (залишкових) напружень в шарі на розподіл контактних зусиль в області контакту і напружено-деформований стан в пружному штампі.

Визначено границі зміни товщини шару залежно від виду початкового (залишкового) напруженого стану, при якому можна користуватися моделлю пружного півпростору з початковими (залишковими) напруженнями.

7. Визначено тип особливості розглядуваного класу задач в напружених на границі області контакту залежно від структури пружного потенціалу; одержано трансцендентні рівняння, які визначають величину параметра, що характеризує дану особливість.

8. В усіх розглянутих конкретних задачах одержано явні формули на напружено-деформований стан пружних матеріалів (накладок), півпростору (півплощини) шару (смуги) і розподіл контактних зусиль в області їх контакту.

9. Одержані розв'язки теоретично обґрунтовані: досліджено збіжність процесу послідовних наближень, досліджено регулярність нескінчених систем алгебраїчних рівнянь і збіжність нескінчених рядів, які входять в одержані розв'язки. Наведено способи обчислення деяких сингулярних і кратних квадратур.

#### II. Виявлено механічний ефект.

1. В усіх наведених вище задачах виявлено механічний ефект, який характеризується тим, що при прямованні початкових (залишкових) напружень до величин, які відповідають втраті поверхневої стійкості ( $\lambda_{kp}$ ) півпростору (півплощини) і шару, як в півпросторі (півплощині) і шарі, так й у пружних штампях (накладках) виникають «резонансні явища», які були відкриті раніше О. М. Гузем в механіці крихкого руйнування матеріалів з початковими (залишковими) напруженнями.

#### III. Рекомендації для інженерних методів розрахунку.

1. Наявність стискуючих початкових (залишкових) напружень в півпросторі (півплощині) і шарі призводить до значного зменшення контактних зусиль і збільшення переміщень під штампом. Для розтягуючих початкових (залишкових) напружень характерне значне збільшення контактних напружень і зменшення переміщень під штампом.

Таким чином, можна підібрати такий початковий (залишковий) напружений стан, при якому характерні (необхідні) експлуатаційні напруження в місцях контакту приймають мінімальне значення.

2. При розрахунках на міцність по контактних переміщеннях в області контакту тіл з початковими (залишковими) напруженнями найбільш небезпечними є стискуючі початкові (залишкові) напруження, а по контактних напруженнях розтягуючі початкові (залишкові) напруження.

3. Вплив початкових (залишкових) напружень в півпросторі (півплощині), шарі та напружено-деформований стан в напруженому штампі має місце лише на його поверхні в області  $\xi < 1$  ( $\xi$  – безрозмірна координата висоти пружного штампів) і залежить від структури пружного потенціала.

4. Механічний ефект, який полягає в тому, що напруження і переміщення під штампом різко змінюються (переміщення прямує до нескінченності, напруження – до нуля), тобто півпростір (півплощина), шар знаходяться в стані нейтральної рівноваги і для малих переміщень штампів (в рамках лінеаризованої теорії пружності) непотрібно прикладати зусиль. З інженерної точки зору, виникнення початкових (залишкових) напружень по величині, близьких до поверхневої нестійкості, є дуже небезпечним явищем, так як це призводить до різкої зміни напружено-деформованого стану тіл, які перебувають в контакті, і в кінцевому результаті – до руйнування конструкції.

#### II. Розвиток наукових основ та застосування методів визначення зносу опор ковзання

Основні результати та висновки по напрямку II наступні:

1. Систематизовані зносоконтактні задачі для циліндричних трибосистем (опор) ковзання.

2. На підставі модифікації методу осереднення функціональних поправок розроблений метод побудови аналітичних розв'язків нелінійних контактних (КЗ), зносоконтактних (ЗКЗ) та термозносоконтактних (ТЗКЗ) задач трибомеханіки у вигляді послідовності наближень контактного тиску. Знайдені умови збіжності послідовності наближень та оцінка похибки.

3. Вказаним методом для усталеного зношування з'єднань типу «вал – втулка» і «вал – вушко» знайдені розв'язки нових задач:

- 1) ЗКЗ для випадку зворотно-обертового руху втулки;
- 2) ЗКЗ для випадку періодично змінного за величиною навантаження, діючого на вал;
- 3) ЗКЗ для спряження «вал – втулка» з врахуванням змінності коефіцієнта тертя;
- 4) КЗ і ЗКЗ для спряження «вал – вушко» з врахуванням сил тертя.

На відміну від відомих чисельних розв'язків одержані аналітичні розв'язки ЗКЗ для:

- 1) випадку загальної степеневі залежності інтенсивності зносу втулки від контактної тиску;
- 2) випадку перекосу осей валу і втулки.

Отримані розв'язки задач використані для прогнозування працездатності (ресурсу) опорних дейдвудних підшипників гребних валів суден, підшипникового вузла передніх коліс тролейбусів, підшипників ковзання в механізмі відрізування автоматів для виготовлення цвяхів.

4. Вперше сформовані математичні моделі і побудовані аналітичні розв'язки ЗКЗ для неусталеного зношування елементів трибосистем ковзання. Як моделі зношування розглянуті модель старіння, спадкова модель і модель зі зворотним зв'язком щодо зносу.

5. Проведені експериментальні дослідження за схемою циліндрів, що перехреснюються, для визначення числових значень характеристик зносостійкості матеріалів. Встановлено, що для визначення характеристик достатньо мати експериментальну залежність типу «шлях тертя – розміри плями контакту» для однієї величини навантаження. Для апробації теоретичних результатів проведені експериментальні дослідження на знос бронзографітових втулок. Зіставлення розрахункових даних залежності «шлях тертя – знос» з експериментальними даними свідчить про коректність пропонує методів розрахунку зносу.

6. Визначені аналітичні залежності для ресурсів спряжень «незношуваний вал – зношувана втулка» для законів усталеного та неусталеного зношування втулки. Встановлено наступне:

а) для усталеного зношування врахування пружності втулки призводить до зменшення ресурсу спряження;

б) для усталеного зношування жорсткої втулки збільшення параметра  $m_2$  у законі зношування веде до підвищення відносного (безрозмірного) ресурсу;

в) для неусталених режимів зношування збільшення параметрів  $\alpha, \chi$  у випадку граничних кутів  $\varphi_0^* \geq 60^\circ - 65^\circ$  призводить до зниження відносного (безрозмірного) ресурсу.

7. З метою підвищення ресурсу роботи трибосистем розв'язана задача керування контактною взаємодією для низки спряжень за умов усталеного та неусталеного зношування.

8. Розроблена аналітико-чисельна процедура визначення температурних розподілів в одно- і двошарових елементах трибосистем, які знаходяться в умовах лінійної або нелінійної теплопровідності.

9. Для оцінки впливу теплоутворення на зносоконтактні параметри побудовані розв'язки зв'язних термотрибоконтактних задач для циліндричної трибосистеми ковзання для випадків одно- і двофакторного законів зношування. Встановлено наступне:

а) якщо вплив теплоутворення враховувати лише за допомогою додаткового доданку в умові контакту, то це призводить до збільшення шляху тертя, необхідного для досягнення таких же кутів контакту, як в задачі без врахування теплоутворення;

б) при введенні температурного чинника в закон зношування зростання характеристики  $m_T$  призводить до зниження значень шляху тертя для досягнення заданих кутів контакту, тобто веде до зниження довговічності трибосистеми.

10. Проведено визначення напружено-деформованого стану в околі області контакту (зношування) для низки моделей усталеного та неусталеного зношування.

11. Результати роботи використовуються в навчальному процесі в Хмельницькому національному університеті і в інженерних розрахунках на підприємствах:

1) Хмельницький завод з випуску ковальсько-пресового устаткування (ВАТ «ПРИГМА-ПРЕС») (теоретичні викладки, рекомендації, акт від 30.05.2001);

2) Іллічівський судноремонтний завод (Одеська обл.) (теоретичні викладки, рекомендації, акт від 21.11.2001);

3) Хмельницьке комунальне підприємство «Електротранс» (теоретичні дослідження, результати розрахунків ресурсу поліамідних втулок, рекомендації щодо подовження терміну роботи втулок, акт від 04.11.2004).

#### Список використаних джерел

1. Бабич С. Ю. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (жесткие штампы) / С. Ю. Бабич, А. М. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1989. – 25, № 8. – С. 3 – 18.
2. Бабич С. Ю. О контактной задаче предварительно напряженного слоя / С. Ю. Бабич, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 5. – С. 110 – 112.
3. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел / Гузь А.Н. – К. : Наукова думка, 1971. – 276 с.
4. Guz A. N. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research / A. N. Guz, S. Y. Babich, V. B. Rudnitsky // Appl. Mechanics Rev. – 1998. – Vol. S1. – P. 80.

5. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии / Гузь А.Н. – К. : Наук. думка, 1979. – 114 с.
6. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях / Гузь А.Н. – К. : Наук. думка, 1973. – 272 с.
7. Гузь А.Н. О представлении общих решений линеаризованной теории упругости сжимаемого тела / А.Н. Гузь // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 8. – С. 700 – 703.
8. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями / Гузь А.Н. – К. : Наук.думка, 1983. – 296 с.
9. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Общие вопросы / Гузь А.Н. – К. : Наук. думка, 1986. – Т. 1. – 376 с.
10. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Закономерности распространения / Гузь А.Н. – К. : Наук. думка, 1986. – Т. 2. – 536 с.
11. Гузь А.Н. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 8. – С. 3 – 11.
12. Гузь А.Н. Контактные задачи для полуплоскости с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1985. – 20, № 3. – С. 68 – 78.
13. Гузь А.Н. Периодическая контактная задача для полуплоскости с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Докл. АН СССР. – 1985. – 280, № 4. – С. 831 – 833.
14. Развитие теории контактных задач в СССР. – М. : Наука, 1976. – 494 с.
15. Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие полуплоскости с начальными напряжениями и упругой накладки / В.Б. Рудницкий // Тез. докл. на II Всесоюз. науч.-техн. семинаре по неклассическим проблемам механики композиционных материалов и конструкций из них. – К., 1984. – 92 с.
16. Рудницкий В.Б. Контактные задачи для полуплоскости и полосы с начальными напряжениями, взаимодействующих с упругими накладками и стрингерами / В.Б. Рудницкий // Матер. на II Всесоюз. науч.-техн. конф. [«Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов»]. – Ереван : Изд-во Ереван. ун-та, 1984. – Т. 3. – С. 89.
17. Рудницкий В. Б. Контактное взаимодействие упругого штампа с предварительно напряженным полупространством и слоем конечной толщины / В.Б. Рудницкий // Тез. докл. II Всесоюз. конф. по теории упругости. – Тбилиси, 1984. – 238 с.
18. Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие двух полуплоскостей с начальными напряжениями и упругого штампа (сжимаемые тела) / В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1985. – 21, № 2. – С. 55 – 62.
19. Рудницкий В.Б. Плоская контактная задача для упругого прямоугольного штампа и полуплоскости с начальными напряжениями / В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1985. – 21, № 10. – С. 69 – 74.
20. Рудницкий В. Б. Пространственные контактные задачи для тел с начальными напряжениями, взаимодействующих с упругими штампами / В.Б. Рудницкий // Тез. докл. на III Всесоюз. конф. [«Смешанные задачи механики деформируемого тела»]. – Харьков, 1985. – С. 245.
21. Рудницкий В. Б. Контактные задачи для слоя с начальными напряжениями, взаимодействующего с упругими штампами / В.Б. Рудницкий // Тез. докл. II Всесоюз. конф. по нелинейной теории упругости. – Фрунзе, 1985. – 413 с.
22. Рудницкий В. Б. Контактные задачи для тел с начальными напряжениями / В.Б. Рудницкий // Тез. докл. совещ. по применению композиционных материалов в сельскохозяйственном машиностроении. – Чернигов, 1985. – 148 с.
23. Рудницкий В.Б. Плоские контактные задачи для предварительно напряженных упругих тел с тонкими покрытиями / В.Б. Рудницкий // Тез. докл. науч.-техн. конф. [„Применение композиционных материалов на полимерной и металлических матрицах”]. – Пермь, 1985. – С. 121.
24. Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие полупространства с начальными напряжениями и упругого конечного цилиндра / В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1986. – 22, № 4. – С. 44 – 51.
25. Рудницкий В.Б. Решение контактной задачи для предварительно напряженного слоя и штампа / В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 3. – С. 14 – 21.
26. Рудницкий В.Б. Осесимметричная пространственная контактная задача для упругого полупространства с начальными напряжениями при учете сцепления / В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 4. – С. 112 – 115.
27. Рудницкий В.Б. Влияние начальных напряжений в слое на контактное давление при взаимодействии с цилиндрическим штампом / В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 8. – С. 11 – 19.
28. Рудницкий В.Б. Контактные взаимодействия предварительно напряженного слоя с двумя упругими штампами / В.Б. Рудницкий // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 2. – С. 56 – 61.
29. Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие предварительно напряженных полупространств с упругим цилиндрическим штампом / В.Б. Рудницкий // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 3. – С. 38 – 41.
30. Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие упругих штампов с предварительно напряженными телами : автореф. дис. на соискание науч. степени д-ра техн. наук / В.Б. Рудницкий. – К., 1988. – 33 с.
31. Рудницкий В.Б. О влиянии начальных напряжений в высокоэластичных материалах на упругий

- контакт с цилиндрическим штампом / В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1989. – 25, № 3. – С. 14 – 20.
32. Рудницкий В.Б. Контактные задачи для предварительно напряженных пластин, усиленных упругими насадками / В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1989. – 25, № 4. – С. 123 – 126.
33. Рудницкий В.Б. Локально-однородный контакт предварительно напряженных тел при изнашивании их поверхностей / В.Б. Рудницкий // Матер. III Всесоюз. конф. по нелинейной теории упругости. – Сыктывкар, 1989. – С. 36 – 39.
34. Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие предварительно напряженного слоя с упругими штампами / В.Б. Рудницкий, П.П. Григоренко // Выездное заседание по современным проблемам теории контактных взаимодействий : тез. докл. – Ереван : Изд-во АН АрмССР, 1988. – С. 152.
35. Рудницкий В.Б. Слой из предварительно напряженного материала под действием соосных упругих штампов / В.Б. Рудницкий, П.П. Григоренко // Тез. докл. III Всесоюз. науч. конф. [«Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов»]. – Запорожье, 1989. – С. 83.
36. Рудницкий В.Б. Передача нагрузки в конструкциях машин через предварительно напряженные детали из композитных материалов / В.Б. Рудницкий, П.П. Григоренко // Тез. докл. науч. конф. [«Создание и применение полимерных и композиционных материалов в сельскохозяйственном машиностроении»]. – Днепрпетровск, 1989. – С. 31.
37. Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие полуплоскости с начальными напряжениями и бесконечного стержня / В.Б. Рудницкий, В.П. Стукалов // Тез. докл. науч.-техн. конф. [«Применение композиционных материалов на полимерной и металлических матрицах»]. – Пермь, 1985. – С. 101.
38. Рудницкий В.Б. Напряженно-деформированное состояние слоя с начальными напряжениями / В.Б. Рудницкий, Г.Ф. Троян // Тез. докл. совещ. по применению композиционных материалов в сельхозмашиностроении. – Чернигов, 1985. – С. 148.
39. Рудницкий В.Б. О численном приеме решения некоторых нелинейных задач математической физики / В.Б. Рудницкий, В.Г. Грбрусев, Б.Г. Шелестовский // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений математической физики : тез. докл. всеююз. конф. : в 2 ч. Ч. 2. – Тернополь, 1989. – С. 364 – 365.
40. Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие упругого кольцевого штампа с предварительно напряженным шаром / В.Б. Рудницкий, М.Я. Шелестовская // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 54 – 57.
41. Рудницкий В.Б. Слой с начальными напряжениями под действием двух штампов / В.Б. Рудницкий, П.П. Григоренко // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 9. – С. 35 – 36.
42. Biot M.A. Mechanics of incremental deformation / Biot M.A. – New York : John Wiley and Sons, 1965. – 504 p.
43. Guz A.N. Kontaktowe oddziaływanie sprężystego stempla ze wstępnie napreżoną warstwą / A.N. Guz, V.B. Rudnitsky // *Mechanica Teoretyczna i Stosowana*. – 1987. – № 25. – S. 323 – 340.
44. Rudnitsky V. Angular punch contact interaction with the preliminary stressed layer / Rudnitsky V., Gabrusev V., Shelestovsky B. // *Second World Congress on Computational Mechanics*. – 1990. – August 27 – 31.
45. Babich S.Yu. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research / Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. // *Appl. Mech. Reviews*. – 1998. – 51, № 5. – P. 343 – 371.
46. Babich S.Yu. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches / Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – 40, № 7. – P. 744 – 765.
47. Guz A.N. Constructing the three-dimensional theory of stability of deformable bodies / A.N. Guz // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – 37, № 1. – P. 1 – 37.
48. Guz A.N. Establishing the fundamentals of the theory of stability of mine workings / A.N. Guz // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – 39, № 1. – P. 20 – 48.
49. Guz A.N. Mixed plane problems in linearized solid mechanics. Exact solutions / Guz A.N., Guz I.A. // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – 40, № 1. – P. 1 – 29.
50. Guz A.N. The physical fundamentals of the ultrasonic nondestructive stress analysis of solids / Guz A.N., Makhort F.G. // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – 36, № 9. – P. 1119 – 1149.
51. Guz A.N. Analytical solution of stability problem for two composite half-planes compressed along interfacial cracks / Guz A.N., Guz I.A. // *Composites. Part B*. – 2000. – 31, № 5. – P. 405 – 418.
52. Guz A.N. The stability of the interface between two bodies compressed along cracks. 1. Exact solutions for the case of unequal roots / Guz A.N., Guz I.A. // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – 36, № 4. – P. 482 – 491.
53. Guz A.N. The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 2. Exact solutions for the case of equal roots / Guz A.N., Guz I.A. // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – 36, № 5. – P. 615 – 622.
54. Guz F.N. The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 3. Exact solutions for the combined case of equal and unequal roots / Guz F.N., Guz I.A. // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – 36, № 6. – P. 759 – 768.
55. Guz A.N. The stability of two different half-planes on compression along interfacial cracks: Analytical solutions / Guz A.N., Guz I.A. // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – 37, № 7. – P. 906 – 912.
56. Guz A.N. Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 1. Problem formulation and basic relations / A.N. Guz // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – 38, № 4. – P. 423 – 431.
57. Guz A.N. Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 2. Exact solution. The case of unequal roots / A.N. Guz // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – 38, № 5. – P. 548 – 555.

58. Guz A.N. Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 3. Exact solution. The case of unequal roots / A.N. Guz // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – 38, № 6. – P. 693 – 700.
59. Guz A.N. Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 4. Exact solution. The case of unequal and equal roots / A.N. Guz // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – 38. – P. 806 – 814.
60. Guz I.A. Stability of the composite under compression along the crack situated of the boundary between layers / I.A. Guz // *Doklady Akademii Nauk SSSR.* – 1992. – 325, № 3. – P. 455 – 458.
61. Guz I.A. Stability of the composite under compression along 2 microcracks situated on the interlayers boundary / I.A. Guz // *Doklady Akademii Nauk SSSR.* – 1993. – 328, № 4. – P. 437 – 439.
62. Guz A.N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses / A.N. Guz // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – 38, № 1. – P. 23 – 59.
63. Любин А.Г. Расчет температурных полей в стенках паропроводов с учетом нелинейности допускаемых напряжений / А.Г. Любин // *Теплоэнергетика.* – 1993. – № 4. – С. 47 – 49.
64. Любин А.Г. О расчете нестационарных температурных полей в двухслойных плоских и цилиндрических покрытиях узлов трения скольжения при зависящем от температуры коэффициента трения / А.Г. Любин // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 1997. – № 1. – С. 42 – 45.
65. Кузьменко А.Г. Контактные задачи для подшипников скольжения с износом / А.Г. Кузьменко, А.Г. Любин, В.А. Кузьменко // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 1997. – № 3. – С. 122 – 143.
66. Кузьменко А.Г. Контактная задача для РПС с учетом изнашивания при перекосе осей вала и вкладыша / А.Г. Кузьменко, А.Г. Любин, В.А. Кузьменко // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 1997. – № 4. – С. 76 – 80.
67. Любин А.Г. Аналитико-численная процедура решения контактной задачи для РПС при степенном законе изнашивания / А.Г. Любин, А.Г. Кузьменко // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 1997. – № 4. – С. 143 – 149.
68. Любин О.Г. Нестационарна температурна задача при фрикційному контакті / О.Г. Любин // *Вісник Технологічного університету Поділля.* – 1998. – № 2. – С. 128 – 131.
69. Кузьменко А.Г. Контактные задачи для подшипников скольжения при изнашивании по модели старения / А.Г. Кузьменко, А.Г. Любин // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 1998. – № 2. – С. 131 – 141.
70. Любин А.Г. Аналитическое исследование температурных полей в радиальных подшипниках скольжения / А.Г. Любин // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 1998. – № 3. – С. 60 – 66.
71. Кузьменко А.Г. Контактные задачи для подшипников скольжения при неустановившемся изнашивании по наследственной модели / А.Г. Кузьменко, А.Г. Любин, В.А. Кузьменко // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 1998. – № 3. – С. 70 – 83.
72. Любин А.Г. Термотрибоконтактная задача для цилиндрических опор скольжения / А.Г. Любин // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 1998. – № 4. – С. 9 – 21.
73. Кузьменко А.Г. Контактная задача для сопряжения вал-проушина с учетом трения и износа / А.Г. Кузьменко, А.Г. Любин // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 1998. – № 4. – С. 27 – 35.
74. Любин А.Г. К расчету напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, находящихся в условиях упругопластичности / А.Г. Любин, А.Г. Кузьменко // *Удосконалення процесів та обладнання обробки тиском у машинобудуванні та металургії : міжвузівський темат. зб. наук. праць.* – Краматорськ, 1999. – С. 302 – 304.
75. Любин А.Г. Трибоконтактные задачи для подшипников скольжения с учетом износа вала / А.Г. Любин // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 1999. – № 1. – С. 18 – 32.
76. Кузьменко А.Г. Контактна задача для спряження вал-проушина з урахуванням тертя та зношування / А.Г. Кузьменко, О.Г. Любин // *Машинознавство.* – 1999. – № 5. – С. 22 – 27.
77. Любин А.Г. Контактные задачи для подшипников скольжения при неустановившемся изнашивании по модели с обратной связью относительно износа / А.Г. Любин, А.Г. Кузьменко // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 1999. – № 2. – С. 112 – 118.
78. Кузьменко А.Г. Система расчетно-экспериментальных методов оценки износа и надежности опор скольжения / А.Г. Кузьменко, А.Г. Любин, В.А. Кузьменко // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 2000. – № 1. – С. 30 – 45.
79. Любин А.Г. Износоконтактная задача для сопряжения вал-втулка (обратная пара трения) / А.Г. Любин, А.Г. Кузьменко // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 2000. – № 3. – С. 3 – 8.
80. Любин А.Г. К определению износоконтактных параметров цилиндрических опор скольжения в случае возвратно-вращательного движения (качательный режим) / А.Г. Любин, А.Г. Кузьменко // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 2000. – № 4. – С. 149 – 153.
81. Любин А.Г. Износ подшипника скольжения при переменной нагрузке / А.Г. Любин, А.Г. Кузьменко // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 2001. – № 1. – С. 76 – 79.
82. Любин А.Г. Термоизносоконтактная задача для сопряжения «вал-втулка» в случае двухфакторного закона изнашивания / А.Г. Любин, А.Г. Кузьменко // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 2001. – № 2. – С. 40 – 47.
83. Любин А.Г. Методика и результаты оценки ресурса опорных дейдвудных подшипников гребных валов / А.Г. Любин, А.Г. Кузьменко // *Проблемы трибологии (Problems of Tribology).* – 2001. – № 4. – С. 160 –

165.

84. Любин А.Г. Износоконтактная задача для сопряжения «вал-втулка» с учетом переменности коэффициента трения / А.Г. Любин // Проблемы трибологии (Problems of Tribology). – 2003. – № 1. – С. 87 – 93.
85. Любин А.Г. Об управлении процессом изнашивания вкладыша радиального подшипника скольжения / А.Г. Любин // Проблемы трибологии (Problems of Tribology). – 2003. – № 2. – С. 81 – 85.
86. Любин А.Г. Об управлении процессом изнашивания в тормозных устройствах / А.Г. Любин // Вісник Технологічного університету Поділля. Технічні науки. – 2003. – № 4. – С. 112 – 116.
87. Любин А.Г. Методы решения контактных задач трибомеханики для опор скольжения / А.Г. Любин, А.Г. Кузьменко // Проблемы трибологии (Problems of Tribology). – 2004. – № 1. – С. 111 – 120.
88. Любин О.Г. Про форми законів зношування елементів циліндричних трибосистем / О.Г. Любин // Вісник Хмельницького національного університету. – 2005. – № 6. – С. 194 – 197.
89. Любин О.Г. Оцінки ресурсу трибосистем типу вал-втулка / О.Г. Любин // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2005. – № 6. – С. 42 – 48.
90. Сулим Г. Керування контактною взаємодією у трибосистемі «вал-втулка» / Г. Сулим, О. Любин // Машинознавство. – 2006. – № 3. – С. 16 – 20.
91. Сулим Г.Т. Контактна задача для з'єднання «циліндр – кільцевий шар» з урахуванням зношування / Г.Т. Сулим, О.Г. Любин // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 2006. – № 2/2. – С. 173 – 179.
92. Любин О.Г. Контактна задача для з'єднання «циліндр – кільце» / О.Г. Любин // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2006. – № 4. – С. 24 – 28.
93. Сулим Г.Т. Контакт жорстких зношуваних тіл під дією змінюваного навантаження / Г.Т. Сулим, О.Г. Любин // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 164 – 172.
94. Любин О.Г. Напружено-деформований стан у з'єднанні «циліндр – кільцевий шар» з врахуванням температурного чинника / О.Г. Любин // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2007. – № 1. – С. 136 – 138.