

ЗАДАЧА МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ТЕРМОПРУЖНИХ ПОЛІВ ДЛЯ ІЗОТРОПНОЇ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ОБМЕЖЕНОЇ ПЛАСТИНИ

Методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є на $(n+1)$ -шаровому сегменті побудовано в замкнутій формі розв'язок динамічної задачі термопружності для $(n+1)$ -складової тонкої обмеженої ізотропної пластини.

By means of the finite integral Fourier transformation for $(n+1)$ -segment of sphere there has been built a solution in a closed form of the dynamic problem of thermoelasticity for $(n+1)$ -component thin bordered isotropic plate.

Ключові слова: інтегральне перетворення Фур'є, динамічна задача термопружності.

Задача про структуру динамічного термопружного поля в ізотропній $(n+1)$ -складовій тонкій обмеженій пластині математично приводить до побудови обмеженого в області

$$D_n = \left\{ (t, x) : t \in (0, \infty), x \in \bigcup_{j=1}^{n+1} (I_{j-1}, I_j), I_j \geq 0, I_{n+1} \equiv l < \infty \right\}$$

розв'язку сепаратної системи рівнянь руху

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} - \frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = m_j \frac{\partial T_j}{\partial x} \equiv \psi_j(t, x), j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

за початковими умовами

$$U_j(t, x)|_{t=0} = \varphi_{1j}(x), \left. \frac{\partial U_j(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_{2j}(x), \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(\bar{\alpha}_{11}^0 \frac{\partial}{\partial x} + \bar{\beta}_{11}^0 \right) U_1(t, x) \Big|_{x=l_0} = \bar{g}_0(t), \left(\bar{\alpha}_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{\beta}_{22}^{n+1} \right) U_{n+1}(t, x) \Big|_{x=l} = \bar{g}_l(t), \quad (3)$$

та умовами ідеального механічного контакту

$$\begin{cases} [U_k(t, x) - U_{k+1}(t, x)] \Big|_{x=l_k} = 0, k = \overline{1, n} \\ \left(\frac{\partial U_k(t, x)}{\partial x} - d_k \frac{\partial U_{k+1}(t, x)}{\partial x} \right) \Big|_{x=l_k} = G_k(t). \end{cases} \quad (4)$$

У формулах (2) – (4) μ_j – коефіцієнт Пуассона, α_{t_j} – температурний коефіцієнт лінійного розширення ізотропного тіла, $c_j = \left[E_j \rho_j^{-1} (1 - \mu_j^2) \right]^{-\frac{1}{2}}$ – швидкість поширення поздовжньої хвилі у плоскому напруженому стані, E_j – модуль Юнга, ρ_j – густина матеріалу;

$$G_k(t) = \frac{1}{\alpha_k} [\beta_k T_k(t, l_k) - \beta_{k+1} T_{k+1}(t, l_k)], \alpha_j = \frac{E_j}{1 - \mu_j^2}, \beta_j = \frac{E_j}{1 - \mu_j} \alpha_{t_j}, d_j = \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}, j = \overline{1, n+1}. \quad (5)$$

Зауважимо, що: 1) для задачі в переміщеннях $\bar{\alpha}_{11}^0 = 0, \bar{\beta}_{11}^0 = 1, \bar{\alpha}_{22}^{n+1} = 0, \bar{\beta}_{22}^{n+1} = 1$; 2) для задачі в напруженнях (край пластини вільний від зовнішнього навантаження)

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{11}^0 &= 1, \quad \bar{\beta}_{11}^0 = 0, \quad \bar{\alpha}_{22}^{n+1} = 1, \quad \bar{\beta}_{22}^{n+1} = 0; \\ \bar{g}_0(t) &= m_1 T_1(t, l_0) + \vartheta_0(t), \quad \bar{g}_l(t) = m_{n+1} T_{n+1}(t, l) + \vartheta_l(t), \\ \bar{g}_0(t) &= m_1 T_1(t, l_0), \quad \bar{g}_l(t) = m_{n+1} T_{n+1}(t, l).\end{aligned}$$

Розв'язок задачі (1) – (4) також побудований методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є на сегменті $[l_0, l]$ з n точками спряження [3].

Визначимо величини і функції

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_k &= \prod_{j=k}^n \frac{1}{d_j} \frac{c_{n+1}}{c_k^2}, \quad \bar{\sigma}_n = \frac{1}{d_n} \frac{c_{n+1}}{c_n^2}, \quad \bar{\sigma}_{n+1} = \frac{1}{c_{n+1}}; \\ \bar{\Delta}_n(\lambda_j) &= \left(\prod_{k=1}^n \frac{d_k}{c_{k+1}} \right) \lambda_j^n; \\ \alpha_{11}^k &= \beta_{21}^k = \alpha_{12}^k = \beta_{22}^k = 0, \quad \beta_{11}^k = \alpha_{21}^k = \beta_{12}^k = 1; \quad \alpha_{22}^k = d_k > 0, \\ \bar{\vartheta}_{11}^{01} \left(\frac{\lambda_i}{c_1} l_0 \right) &= -\bar{\alpha}_{11}^0 \frac{\lambda_i}{c_1} \sin \frac{\lambda_i}{c_1} l_0 + \bar{\beta}_{11}^0 \cos \frac{\lambda_i}{c_1} l_0; \\ \bar{\vartheta}_{11}^{02} \left(\frac{\lambda_i}{c_1} l_0 \right) &= \bar{\alpha}_{11}^0 \frac{\lambda_i}{c_1} \cos \frac{\lambda_i}{c_1} l_0 + \bar{\beta}_{11}^0 \sin \frac{\lambda_i}{c_1} l_0; \\ \bar{\vartheta}_{11}^{k1} \left(\frac{\lambda_i}{c_s} l_k \right) &= \cos \frac{\lambda_i}{c_s} l_k, \quad \bar{\vartheta}_{11}^{k2} \left(\frac{\lambda_i}{c_s} l_k \right) = \sin \frac{\lambda_i}{c_s} l_k; \\ \bar{\vartheta}_{21}^{k1} \left(\frac{\lambda_i}{c_s} l_k \right) &= -\frac{\lambda_i}{c_s} \sin \frac{\lambda_i}{c_s} l_k, \quad \bar{\vartheta}_{21}^{k2} \left(\frac{\lambda_i}{c_s} l_k \right) = \frac{\lambda_i}{c_s} \cos \frac{\lambda_i}{c_s} l_k, \\ \bar{\vartheta}_{12}^{k1} \left(\frac{\lambda_i}{c_s} l_k \right) &= \cos \frac{\lambda_i}{c_s} l_k, \quad \bar{\vartheta}_{12}^{k2} \left(\frac{\lambda_i}{c_s} l_k \right) = \sin \frac{\lambda_i}{c_s} l_k, \\ \bar{\vartheta}_{22}^{k1} \left(\frac{\lambda_i}{c_s} l_k \right) &= -\frac{\lambda_i}{c_s} d_k \sin \frac{\lambda_i}{c_s} l_k, \quad \bar{\vartheta}_{22}^{k2} \left(\frac{\lambda_i}{c_s} l_k \right) = \frac{\lambda_i}{c_s} d_k \cos \frac{\lambda_i}{c_s} l_k, \\ \bar{\delta}_{sm}^k \left(\frac{l_k}{c_k} \lambda_i, \frac{l_k}{c_{k+1}} \lambda_i \right) &= \bar{\vartheta}_{11}^{ks} \left(\frac{l_k}{c_k} \right) \times \\ &\times \bar{\vartheta}_{22}^{km} \left(\frac{l_k}{c_k} \lambda_i \right) - \bar{\vartheta}_{21}^{ks} \left(\frac{l_k}{c_k} \lambda_i \right) \bar{\vartheta}_{12}^{km} \left(\frac{l_k}{c_{k+1}} \lambda_i \right); \\ \bar{\omega}_{01}(\lambda_i) &= \bar{\vartheta}_{11}^{01} \left(\frac{l_0}{c_i} \lambda_i \right), \quad \bar{\omega}_{02}(\lambda_i) = \bar{\vartheta}_{11}^{02} \left(\frac{l_0}{c_i} \lambda_i \right) \\ \bar{\omega}_{sm}(\lambda_i) &= \bar{\omega}_{s-1,2}(\lambda_i) \bar{\delta}_{1m}^s \left(\frac{l_s}{c_s} \lambda_i, \frac{l_s}{c_{s+1}} \lambda_i \right) - \\ &- \bar{\omega}_{s-1,1}(\lambda_i) \bar{\delta}_{2m}^s \left(\frac{l_s}{c_s} \lambda_i, \frac{l_s}{c_{s+1}} \lambda_i \right); \\ \bar{\vartheta}_{22}^{n+1,1} &= -\alpha_{22}^{n+1} \frac{l}{c_{n+1}} \sin \frac{l}{c_{n+1}} \lambda_i + \beta_{22}^{n+1} \cos \frac{l}{c_{n+1}} \lambda_i; \\ \bar{\vartheta}_{22}^{n+1,2} &= -\alpha_{22}^{n+1} \frac{l}{c_{n+1}} \cos \frac{l}{c_{n+1}} \lambda_i + \beta_{22}^{n+1} \sin \frac{l}{c_{n+1}} \lambda_i.\end{aligned}$$

Тут λ_i – утворюючі дискретний спектр корені трансцендентного рівняння

$$\bar{\Delta}_n(\lambda) \equiv \bar{\vartheta}_{22}^{n+1,2} \left(\frac{l}{c_1} \lambda \right) \bar{\omega}_{n1}(\lambda) - \bar{\vartheta}_{22}^{n+1,1} \left(\frac{l}{c_1} \lambda \right) \bar{\omega}_{n2}(\lambda) = 0. \quad (6)$$

Компоненти власної функції

$$\bar{V}(x, \lambda_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \bar{V}_j(x, \lambda_i) \theta(x - l_{j-1}) \theta(l_j - x) \quad (7)$$

обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} \bar{V}_m(x, \lambda_i) &= \prod_{j=m}^n (d_j \lambda_j) \left[\bar{\omega}_{m-1,2}(\lambda_i) \cos \frac{x}{c_m} \lambda_i - \bar{\omega}_{m-1,1}(\lambda_i) \sin \frac{x}{c_m} \lambda_i \right], \\ \bar{V}_{n+1}(x, \lambda_i) &= \bar{\omega}_{n2}(\lambda_i) \cos \frac{x}{c_{n+1}} \lambda_i - \bar{\omega}_{n1}(\lambda_i) \sin \frac{x}{c_{n+1}} \lambda_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Вагова функція

$$\bar{\sigma}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \bar{\sigma}_k \theta(x - l_{k-1}) \theta(l_k - x), \quad l_{n+1} \equiv l < \infty, \quad (9)$$

квадрат норми власної функції

$$\|\bar{V}(x, \lambda_i)\|^2 = \sum_{s=1}^{n+1} \int_{l_{s-1}}^{l_s} [\bar{V}_s(x, \lambda_i)]^2 \bar{\sigma}_s dx. \quad (10)$$

Скінченні пряме $\bar{F}_{ni}$ та обернене $\bar{F}_{ni}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур'є діють за правилами

$$\bar{F}_{ni}[f(x)] = \int_{l_0}^l f(x) \bar{V}(x, \lambda_i) \bar{\sigma}(x) dx \equiv f_i, \quad (11)$$

$$\bar{F}_{ni}^{-1}[f_i] = \sum_{j=1}^{\infty} f_i \frac{\bar{V}(x, \lambda_i)}{\|\bar{V}(x, \lambda_i)\|^2} \equiv f(x), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{ni} \left[\bar{\chi}(x) \frac{d^2 f}{dx^2} \right] &= \sum_{k=1}^{n+1} c_k^2 \int_{l_{k-1}}^{l_k} \frac{d^2 f}{dx^2} \bar{V}_k(x, \lambda_i) \bar{\sigma}_k dx = \\ &= -\lambda_i^2 f_i + \frac{c_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n-1}} \bar{\sigma}_{n+1} \bar{V}_{n+1}(l, \lambda_i) \left(-\bar{\alpha}_{22}^{n+1} \frac{df}{dx} + \bar{\beta}_{22}^{n+1} f \right) \Big|_{x=l} - \\ &\quad - \frac{c_1^2}{\alpha_{11}^0} \bar{\sigma}_1 \bar{V}_1(l_0, \lambda_i) \left(\bar{\alpha}_{11}^0 \frac{df}{dx} + \bar{\beta}_{11}^0 f \right) \Big|_{x=l_0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Напишемо систему (1) і початкові умови (2) в матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U_1 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U_2 \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_{n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^2 \Psi_1 \\ c_2^2 \Psi_2 \\ \dots\dots\dots \\ c_{n+1}^2 \Psi_{n+1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} U_1(t, x) \\ U_2(t, x) \\ \dots\dots\dots \\ U_{n+1}(t, x) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(x) \\ \Phi_{12}(x) \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_{1,n+1}(x) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U_1(t, x) \\ U_2(t, x) \\ \dots\dots\dots \\ U_{n+1}(t, x) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \Phi_{21}(x) \\ \Phi_{22}(x) \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_{2,n+1}(x) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Якщо інтегральний оператор $\bar{F}_{ni}$ зобразити у вигляді матриці-рядка

$$\bar{F}_{nj}[\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots \bar{V}_1(x, \lambda_i) \bar{\sigma}_i dx \int_{l_1}^{l_2} \dots \bar{V}_2(x, \lambda_i) \bar{\sigma}_2 dx \dots \int_{l_{n-1}}^{l_n} \dots \bar{V}_n(x, \lambda_i) \bar{\sigma}_n dx \int_{l_n}^l \dots \bar{V}_{n+1}(x, \lambda_i) \bar{\sigma}_{n+1} dx \right] \quad (16)$$

і застосувати до задачі (14), (15) за правилом множення матриць, то

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_i^2 \right) U_i(t) = - \sum_{k=1}^{n+1} c_k^2 \int_{l_{k-1}}^{l_k} \Psi_k(t, x) \bar{V}_k(x, \lambda_i) \bar{\sigma}_k dx + \frac{c_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} \bar{V}_{n+1}(l, \lambda_i) \bar{g}_l(t) - \frac{c_1^2 \bar{\sigma}_1}{\alpha_{11}^0} \bar{V}_1(l_0, \lambda_i) \bar{g}_0(t), \quad (17)$$

$$U_i(t) \Big|_{t=0} = \varphi_1^i, \quad \frac{dU_i(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \varphi_2^i. \quad (18)$$

У рівностях (17), (18) прийняті позначення:

$$U_i(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} U_k(t, x) \bar{V}_k(x, \lambda_i) \bar{\sigma}_k dx, \\ \varphi_1^i = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} \varphi_{1k}(x) \bar{V}_k(x, \lambda_i) \bar{\sigma}_k dx, \\ \varphi_2^i = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} \varphi_{2k}(x) \bar{V}_k(x, \lambda_i) \bar{\sigma}_k dx.$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (17), (18) є функція

$$U_i(t) = \frac{\sin \lambda_i t}{\lambda_i} \varphi_2^i + \left(\frac{d}{dt} \frac{\sin \lambda_i t}{\lambda_i} \right) \varphi_1^i + \int_0^t \frac{\sin \lambda_i(t-\tau)}{\lambda_i} \times \\ \times \left[\frac{c_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} \bar{V}_{n+1}(l, \lambda_i) \bar{g}_l(\tau) - \frac{c_1^2 \bar{\sigma}_1}{\alpha_{11}^0} \bar{V}_1(l_0, \lambda_i) \bar{g}_0(\tau) \right] d\tau - \\ - \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t c_k^2 \int_{l_{k-1}}^{l_k} \Psi_k(t, \xi) \bar{V}_k(\xi, \lambda_i) \bar{\sigma}_k \frac{\sin \lambda_i(t-\tau)}{\lambda_i} d\xi d\tau. \quad (19)$$

Визначимо функції Коші

$$H_{mk}(t, x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i t}{\lambda_i} \frac{\bar{V}_m(x, \lambda_i) \bar{V}_k(\xi, \lambda_i)}{\|\bar{V}(x, \lambda_i)\|^2}, \quad m = \overline{1, n+1}, \quad k = \overline{1, n+1}, \quad (20)$$

породжені неоднорідністю системи (1) (початковим напруженим станом пластини), і функції Гріна

$$G_{0,m}(t, x) = - \frac{c_1^2 \bar{\sigma}_1}{\alpha_{11}^0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i t \bar{V}_1(l_0, \lambda_i) \bar{V}_m(x, \lambda_i)}{\lambda_i \|\bar{V}(x, \lambda_i)\|^2}, \quad m = \overline{1, n+1}, \quad (21)$$

$$G_{l,m}(t, x) = \frac{c_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i t \bar{V}_{n+1}(l, \lambda_i) \bar{V}_m(x, \lambda_i)}{\lambda_i \|\bar{V}(x, \lambda_i)\|^2}, \quad m = \overline{1, n+1}, \quad (22)$$

породжені дією зусиль на краях $x = l_0$ та $x = l$.

Застосувавши до матриці-елемента $[U_i(t)]$, де функція $U_i(t)$ визначена формулою (19), за правилом множення прямокутних матриць операторну матрицю-стовпець

$$\bar{F}_{ni}^{-1}[...] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} ... \bar{V}_1(x, \lambda_i) \left[\|\bar{V}(x, \lambda_i)\|^2 \right]^{-1} \\ \sum_{i=1}^{\infty} ... \bar{V}_2(x, \lambda_i) \left[\|\bar{V}(x, \lambda_i)\|^2 \right]^{-1} \\ \\ \sum_{i=1}^{\infty} ... \bar{V}_{n+1}(x, \lambda_i) \left[\|\bar{V}(x, \lambda_i)\|^2 \right]^{-1} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

в результаті елементарних перетворень одержуємо розв'язок задачі (2) – (4):

$$\begin{aligned}
U_m(t, x) = & \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} H_{mk}(t, x, \xi) \varphi_{2k}(\xi) \bar{\sigma}_k d\xi + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} H_{mk}(t, x, \xi) \varphi_{1k}(\xi) \bar{\sigma}_k d\xi + \\
& + \int_{l_{k-1}}^{l_k} [G_{0,m}(t - \tau, x) g_0(\tau) + G_{l,m}(t - \tau, x) g_l(\tau)] d\tau - \\
& - \sum_{k=1}^{n+1} c_k^2 \int_{l_{k-1}}^{l_k} H_{mk}(t - \tau, x, \xi) \psi_k(\tau, \xi) \bar{\sigma}_k d\xi d\tau, \quad m = \overline{1, n+1}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Функція

$$U(t, x) = \{U_1(t, x), U_2(t, x), \dots, U_n(t, x), U_{n+1}(t, x)\},$$

де $U_m(t, x)$ визначені формулою (24), описує динамічне поле переміщень в даній пластині. Поле динамічних напружень опишуть функції

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \left\{ \sigma_{xx,1}; \sigma_{xx,2}; \dots, \sigma_{xx,n}; \sigma_{xx,n+1} \right\}, \\ \sigma_{yy} &= \left\{ \sigma_{yy,1}; \sigma_{yy,2}; \dots, \sigma_{yy,n}; \sigma_{yy,n+1} \right\}, \\ \sigma_{xx,j}(t, x) &= \frac{E_j}{1 - \mu_j^2} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} - m_j T_j(t, x) \right), \quad j = \overline{1, n+1}, \\ \sigma_{yy,j}(t, x) &= \mu_j \sigma_{xx,j} - \alpha_{t_j} E_j T_j(t, x), \quad m_j = (1 + \mu_j) \alpha_{t_j}.\end{aligned}$$

Зауважимо, що побудований розв'язок динамічної задачі утримує в собі як розв'язок термопружної задачі, так і розв'язок пружної задачі і в напруженнях, і в переміщеннях.

Надаючи α_{t_j} , c_j , p_j різних значень, можемо змодельовати будь-яку із задач динамічних термопружних полів.

Список використаних джерел

1. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К. : Наук. Думка, 1972. – 307 с.
2. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.
3. Ленюк М.П. Скінченні інтегральні перетворення Фур'є на кусково-однорідному сегменті / М.П. Ленюк // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. пр. – К. : Ін-т матем. АН України. 1993. – Вип. 3. – С. 180 – 195.