

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОСКЛАДОВИХ КРУГОВИХ КІЛЬЦЕВИДНИХ ЦИЛІНДРИЧНО-АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН

Методом функцій впливу і функцій Гріна побудовано розв'язок динамічної задачі термопружності для багатоскладової кругової кільцевидної циліндрично-анізотропної пластини.

Задача про структуру динамічного поля переміщень в круговій кільцевидній $(n+1)$ -складовій циліндрично-анізотропній пластині математично приводить до побудови обмеженого в області $\bar{D}_n^+$ розв'язку сепаратної системи рівнянь руху в переміщеннях B -гіперболічного типу

$$\frac{1}{C_{1m}^2} \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - B_{km} [u_m] = F_m(t, r), \quad m = \overline{1, n+1}, \quad (1)$$

за початковими умовами

$$u_m(t, r)|_{t=0} = \varphi_m(r), \quad \frac{\partial u_m}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_m(r), \quad r \in (R_{m-1}, R_m), \quad (2)$$

умовами ідеального механічного контакту

$$\begin{cases} [u_m(t, r) - u_{m+1}(t, r)]|_{r=R_m} = 0, & m = \overline{1, n}, \\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\gamma_{r\varphi, m}}{r} \right) u_m - \mu_m \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\gamma_{r\varphi, m+1}}{r} \right) u_{m+1} \right] \Big|_{r=R_m} = G_m(t) \end{cases} \quad (3)$$

і крайовими умовами

$$\left(\bar{\alpha}_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \bar{\beta}_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{r=R_0} = \bar{q}_0(t); \quad \left(\bar{\alpha}_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \bar{\beta}_{22}^{n+1} \right) u_{n+1}(t, r) \Big|_{r=R} = \bar{q}_R(t). \quad (4)$$

Розв'язок задачі (1) – (4) побудуємо методом скінченного інтегрального перетворення Ханкеля 2-го роду на сегменті $[R_0, R]$ з n точками спряження [5]. Визначимо величини і функції:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ij} &= 1, \quad \bar{C}_{2j} = \mu_j, \quad \bar{\sigma}_j = \left(C_{1j}^2 \prod_{m=j}^n \mu_m \right)^{-1}, \quad q_{js} = C_{1j}^{-1} \beta_s, \\ \omega_{(k);1}^{(0)}(\lambda_s) &= u_{k_1;11}^{01}(q_{1s} R_0), \\ \omega_{(k);2}^{(0)}(\lambda_s) &= u_{k_1;11}^{02}(q_{1s} R_0); \\ W_{(k);1}(r, \beta_s) &= \left(\prod_{m=1}^n \frac{2\mu_m}{\pi R_m} \right) \left[\omega_{(k);2}^{(0)}(\lambda_s) J_{k_1}(q_{1s} r) - \omega_{(k);1}^{(0)}(\lambda_s) N_{k_1}(q_{1s} r) \right], \\ W_{(k);j}(r, \beta_s) &= \left(\prod_{m=j}^n \frac{2\mu_m}{\pi R_m} \right) \left[\omega_{(k);2}^{(j-1)}(\beta_s) J_{k_j}(q_{js} r) - \omega_{(k);1}^{(j-1)}(\beta_s) N_{k_j}(q_{js} r) \right], \quad j = \overline{2, n}; \\ N_{(k);n+1}(r, \beta_s) &= \omega_{(k);2}^{(n)}(\beta_s) I_{k_{n+1}}(q_{n+1,s} r) - \omega_{(k);1}^{(n)}(\beta_s) N_{k_{n+1}} \left(\frac{\beta_s}{C_{1;n+1}} r \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Тут β_s - утворюючи дискретний спектр корені трансцендентного рівняння

$$\begin{aligned} \Delta_{(k);n}(\beta) &\equiv u_{k_{n+1};22}^{n+1,1}(q_{n+1} R_{n+1}) \omega_{(k);2}^{(n)}(q_1 R_0, q_1 R_1, q_2 R_1, q_2 R_2, \dots, q_n R_n, q_{n+1} R_n) - \\ &u_{k_{n+1};22}^{n+1,2}(q_{n+1} R) \omega_{(k);1}^{(n)}(q_1 R_0, q_1 R_1, q_2 R_1, q_2 R_2, \dots, q_n R_n, q_{n+1} R_n) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Наявність спектральної функції

$$W_{(k)}(r, \beta_s) = \sum_{j=1}^{n+1} W_{(k);j}(r, \beta_s) \theta(r - R_{j-1}) \theta(R_j - r)$$

з її квадратом норми

$$\|W_{(k)}(r, \beta_s)\|^2 = \sum_{j=1}^{n+1} \int_{R_{j-1}}^{R_j} [W_{(k);j}(r, \beta_s)]^2 \bar{\sigma}_j r dr \quad (7)$$

і вагової функції

$$\bar{\sigma}(r) = r \sum_{j=1}^{n+1} \bar{\sigma}_j \theta(r - R_{j-1}) \theta(R_j - r)$$

дозволяє визначити пряме

$$H_{sn;2}^{(k)}[f(r)] = \int_{R_0}^R f(r) W_{(k)}(r, \beta_s) \bar{\sigma}(r) dr \equiv f_s \quad (8)$$

і обернене

$$H_{sn;2}^{-(k)}[f_s] = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \frac{W_{(k)}(r, \beta_s)}{\|W_{(k)}(r, \beta_s)\|^2} \equiv f(r) \quad (9)$$

Скінченні інтегральні перетворення Ханкеля 2-го роду на сегменті $[R_0, R]$ з n точками спряження [1]. При цьому справджується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора:

$$\begin{aligned} H_{sn;2}^{(k)}[X(r)B_{(k)}[f^0(r)]] &\equiv \sum_{j=1}^{n+1} C_{ij}^2 \int_{R_{j-1}}^{R_j} D_{kj}[f(r)] W_{(k);j}(r, \beta_s) \times \\ &\times \bar{\sigma}_j r dr = -\beta_s^2 f_s + C_{1,n+1}^2 \bar{\sigma}_{n+1} R \left(\bar{\alpha}_{22}^{n+1} \right)^{-1} W_{(k);n+1}(R, \beta_s) \times \\ &\times \left(\bar{\alpha}_{22}^0 \frac{df}{dr} + \bar{\beta}_{22}^0 f \right) \Big|_{r=R} + \sum_{j=1}^n C_{1j}^2 \cdot \bar{\sigma}_j \cdot R_j W_{(k);j}(R_j, \beta_s) G_j - \\ &- C_{11}^2 \bar{\sigma}_1 R_0 \left(\bar{\alpha}_{11}^0 \right)^{-1} W_{(k);1}(R, \beta_s) \left(\bar{\alpha}_{11}^0 \frac{df}{dr} + \bar{\beta}_{11}^0 f \right) \Big|_{r=R_0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Напишемо систему (1) і початкові умови (2) у матричній формі:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - C_{11}^2 B_{k_1} \right) u_1(t, r) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - C_{12}^2 B_{k_2} \right) u_2(t, r) \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - C_{1,n+1}^2 B_{k_{n+1}} \right) u_{n+1}(t, r) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11}^2 F_1(t, r) \\ C_{12}^2 F_2(t, r) \\ \dots\dots\dots \\ C_{1,n+1}^2 F_{n+1}(t, r) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_1(t, r) \\ u_2(t, r) \\ \dots\dots\dots \\ u_{n+1}(t, r) \end{bmatrix}_{t=0} &= \begin{bmatrix} \varphi_1(r) \\ \varphi_2(r) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_{n+1}(r) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_1(t, r) \\ u_2(t, r) \\ \dots\dots\dots \\ u_{n+1}(t, r) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \\ \dots\dots\dots \\ \psi_{n+1}(r) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} u_1(t, r) \\ u_2(t, r) \\ \dots\dots\dots \\ u_{n+1}(t, r) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \varphi_1(r) \\ \varphi_2(r) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_{n+1}(r) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_1(t, r) \\ u_2(t, r) \\ \dots\dots\dots \\ u_{n+1}(t, r) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \\ \dots\dots\dots \\ \psi_{n+1}(r) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Зобразимо інтегральний оператор $H_{sn;2}^{(k)}$, що діє за правилом (8) у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{sn,2}^{(k)}[\dots] = \left[\int_{R_0}^{R_1} \dots W_{(k),1}(r, \beta_s) \bar{\sigma}_1 r dr \int_{R_1}^{R_2} \dots W_{(k),2}(r, \beta_s) \bar{\sigma}_2 r dr \dots \right. \\ \left. \dots \int_{R_{n-1}}^{R_n} \dots W_{(k),n}(r, \beta_s) \bar{\sigma}_n r dr \int_{R_n}^{R_{n+1}} \dots W_{(k),n+1}(r, \beta_s) \bar{\sigma}_{n+1} r dr \right]. \quad (13)$$

Якщо до (11), (12) застосувати за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (13), то внаслідок тотожності (10) одержуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \beta_s^2 \right) u_s(t) = \Phi_s(t), \\ u_s(t)|_{t=0} = \varphi_s, \quad \left. \frac{du_s(t)}{dt} \right|_{t=0} = \psi_s. \quad (14)$$

У рівності (14) бере участь функція

$$\Phi_s(t) = \sum_{j=1}^{n+1} C_{1j}^2 \int_{R_{j-1}}^{R_j} f_j(t, r) W_{(k),j}(r, \beta_s) \bar{\sigma}_j r dr + \sum_{j=1}^{n+1} C_{1,j}^2 \times \\ \times \int_{R_{j-1}}^{R_j} T_j(t, r) \left[\alpha_{tj}^* \frac{d}{dr} + \frac{\alpha_{tj}^* - \alpha_{tj}^0}{r} \right] W_{(k),j}(r, \beta_s) \bar{\sigma}_j r dr + \\ + C_{1,n+1}^2 \bar{\sigma}_{n+1} R \left(\bar{\alpha}_{22}^{n+1} \right)^{-1} W_{(k),n+1}(R, \beta_s) \left[\bar{q}_R(t) - \bar{\alpha}_{22}^{n+1} \alpha_{t_{n+1}}^* T_{n+1}(t, R) \right] + \\ + C_{11}^2 \bar{\sigma}_1 R_0 \left(\bar{\alpha}_{11}^0 \right)^{-1} W_{(k),1}(R_0, \beta_s) \left[\bar{\alpha}_{11}^0 \alpha_{t_1}^* T_1(t, R_0) - \bar{q}_0(t) \right]. \quad (15)$$

Розв'язком задачі Коші (14) є функція

$$u_s(t) = \frac{\sin \beta_s t}{\beta_s} \psi_s + \frac{d}{dt} \frac{\sin \beta_s t}{\beta_s} \varphi_s + \int_0^t \frac{\sin \beta_s(t-\tau)}{\beta_s} \Phi_s(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Якщо зобразити оператор $H_{sn,2}^{-(k)}$ у вигляді операторної матриці - стовпця, то одержуємо компоненти

$$u_m(t, r) = \sum_{j=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{j-1}}^{R_j} K_{(k),mj}(t-\tau, r, \rho) \left[C_{1j}^2 f_j(\tau, \rho) + \psi_j(\rho) \delta_t(r) \right] \times \\ \times \bar{\sigma}_j \rho d\rho d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{n+1} \int_{R_{j-1}}^{R_j} K_{(k),mj}(t, r, \rho) \varphi_j(\rho) \bar{\sigma}_j \rho d\rho + \\ + \sum_{j=1}^{n+1} C_{1j}^2 \int_0^t \int_{R_{j-1}}^{R_j} T_j(\tau, \rho) H_{(k),mj}(t-\tau, r, \rho) \bar{\sigma}_j \rho d\rho d\tau + \\ + \int_0^t \left\{ M_{(k),n+1,m}(t-\tau, r) \left[\bar{q}_R(\tau) - \bar{\alpha}_{22}^{n+1} \alpha_{t_{n+1}}^* T_{n+1}(\tau, R) \right] + \right. \\ \left. + M_{(k),1m}(t-\tau, r) \left[\bar{\alpha}_{11}^0 \alpha_{t_1}^* T_1(\tau, R_0) - \bar{q}_0(\tau) \right] \right\} d\tau, \quad m = \overline{1, n+1}. \quad (17)$$

вектор-функції $u = \{u_1, u_2, \dots, u_{n+1}\}$, яка описує в даній круговій кільцевидній $(n+1)$ - складовій циліндрично-анізотропній пластині динамічне поле переміщень.

У формулах (17) беруть участь функції Коші

$$K_{(k),mj}(t, r, \rho) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_s t}{\beta_s} \frac{W_{(k),m}(r, \beta_s) W_{(k),j}(\rho, \beta_s)}{\|W_{(k)}(r, \beta_s)\|^2}; \quad m, j = \overline{1, n+1}, \quad (18)$$

породжені початковим збуренням і збуренням постійно діючих масових сил, функції впливу

$$H_{(k);mj}(t, r, \rho) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_s t}{\beta_s} \frac{W_{(k);m}(r, \beta_s)}{\|W_{(k)}(r, \beta_s)\|^2} \left[\left(\alpha_{t_j}^* \frac{d}{d\rho} + \frac{\alpha_{t_j}^* - \alpha_{t_j}^0}{\rho} \right) W_{(k);j}(\rho, \beta_s) \right]; \quad m, j = \overline{1, n+1}, \quad (19)$$

породжені дією нестационарного температурного поля (20)

$$T_m(t, r) = \sum_{j=1}^{n+1} \int_{R_{j-1}}^{R_j} H_{mj}(t-r, r, \rho) d\rho, \quad m = \overline{1, n+1}, \quad (20)$$

і функції Гріна

$$M_{(k);1m}(t, r) = C_{11}^2 \overline{\sigma}_1 R_0 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_s t}{\beta_s} \frac{W_{(k);1}(R_0, \beta_s) W_{(k);m}(r, \beta_s)}{\overline{\alpha}_{11}^0 \|W_{(k)}(r, \beta_s)\|^2}; \quad (21)$$

$$M_{(k);n+1,m}(t, r) = C_{1,n+1}^2 \overline{\sigma}_{n+1} R \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_s t}{\beta_s} \frac{W_{(k);n+1}(R, \beta_s)}{\overline{\alpha}_{22}^{n+1} \|W_{(k)}(r, \beta_s)\|^2} W_{(k);m}(r, \beta_s), \quad m = \overline{1, n+1}, \quad (22)$$

породжені навантаженням поверхонь $r = R_0$ та $r = R$.

Список використаних джерел

1. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 746 с.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматиз, 1959. – 468 с.
5. Быблив О. Я., Ленюк М. П. Интегральные преобразования Ханкеля II рода для кусочно-однородных сегментов // Изв. вузов. Математика. – 1987. – С. 82 – 85.